KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Hemuppgift 4 i 5B1760 Linjär och kvadratisk optimering 2003/2004.
Inlämnas senast måndag 8 december 2003 kl. 17.00.

Examinator: Krister Svanberg, tel 790 71 37

Ange namn, personnummer och *e-postadress* på rapportens framsida.

I denna uppgift är samarbete tillåtet vid utformningen av Matlab-beräkningarna, men sedan ska varje student *själv*, med egna ord, skriva en kortfattad rapport i vilken redovisas hur uppgiften lösts och vad resultaten blev. Ange även vem eller vilka du samarbetat med. Kopiering av någon annans rapport är inte tillåtet!
Matlab-kod och utskrifter ska bifogas. Vissa studenter kommer (delvis slumpmässigt) att väljas ut för enskild muntlig redovisning av uppgifterna. Kallelse sker via e-post, så kontrollera regelbundet denna.

4.1. Givet den 7×5–matris $\mathbf{A}$ som du använde i Hemuppgift 1, dvs låt $d \in \{1, 2, \ldots, 31\}$ vara den dag i månaden du är född och låt $\ell \in \{0, 1, \ldots, 14\}$ vara den rest som erhålls när man dividerar d med 15. Som matris $\mathbf{A}$ ska du välja den av matriserna $\mathbf{A}_\ell$ på kursens hemsida som svarar mot denna rest ℓ.

Först av allt ska du singulärvärdesfaktorisera $\mathbf{A}$ med hjälp av funktionen `svd`, samt bestäm rangen r för $\mathbf{A}$ med hjälp av funktionen `rank`.
Jämför r med antalet nollskilda singulärvärden.

Ange därefter fyra matriser sådana att
kolonnerna i $\mathbf{U}_1$ utgör en ortonormal bas till underrummet $\mathcal{R}(\mathbf{A})$,
kolonnerna i $\mathbf{U}_2$ utgör en ortonormal bas till underrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$,
kolonnerna i $\mathbf{V}_1$ utgör en ortonormal bas till underrummet $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$,
kolonnerna i $\mathbf{V}_2$ utgör en ortonormal bas till underrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.
Beräkna $\mathbf{U}_1^\mathsf{T}\mathbf{U}_2$, $\mathbf{V}_1^\mathsf{T}\mathbf{V}_2$, $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_1^\mathsf{T} + \mathbf{U}_2\mathbf{U}_2^\mathsf{T}$ och $\mathbf{V}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T} + \mathbf{V}_2\mathbf{V}_2^\mathsf{T}$. Motivera resultaten.

Bestäm vidare en $r \times r$ diagonalmatris $\mathbf{S}_1$ sådan att $\mathbf{A} = \mathbf{U}_1\mathbf{S}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T}$.
Verifiera att det stämmer genom att beräkna $\mathbf{A} - \mathbf{U}_1\mathbf{S}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T}$.

Bestäm pseudoinversen $\mathbf{A}^+$, dels med formeln $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}_1\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{U}_1^\mathsf{T}$,
dels med funktionen `pinv`. Verifiera att bägge ger samma resultat.
Verifiera sedan att $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$ och att $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$.

Ange dels en optimal lösning $\hat{\mathbf{x}}$ till problemet att maximera $|\mathbf{A}\mathbf{x}|$ då $|\mathbf{x}| = 1$,
dels en optimal lösning $\hat{\mathbf{y}}$ till problemet att maximera $|\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}|$ då $|\mathbf{y}| = 1$.
Verifiera (numeriskt) att $|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}| = \sigma_1$ och $|\mathbf{A}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}}| = \sigma_1$. Försök motivera detta.

Bestäm slutligen, för $k=1$ resp $k=2$, den matris $\mathbf{X}^{(k)}$ som bäst approximerar $\mathbf{A}$, i enlighet med avsnitt 18.5 i gröna häftet, bland alla matriser som har rangen k.

Verifiera (numeriskt) att $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}^{(k)} - a_{ij})^2 = \sum_{j=k+1}^{r} \sigma_j^2$, för $k=1$ och $k=2$.

Lycka till!