

Hemuppgift nr 1 i kursen
Linjär och kvadratisk optimering

av

Sven Svensson, 820317-9999

email: t01_svsv@t.kth.se

4 November 2002

Hemuppgift 1.1

$$\text{Givet är min matris } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -40 & -48 & 8 & 16 & 60 \\ -44 & -22 & -14 & 38 & 62 \\ 35 & -12 & 31 & -32 & -35 \\ 30 & 57 & -23 & 15 & -40 \\ 86 & 79 & 3 & -71 & -138 \\ -155 & -107 & -28 & 119 & 225 \\ 75 & 36 & 23 & -48 & -95 \end{bmatrix} = M_{mar}.$$

Uppgiften går ut på att bestämma $r =$ rangen på matrisen \mathbf{M} samt två matriser \mathbf{B} ($7 \times r$) och \mathbf{C} ($r \times 5$) sådana att $\mathbf{M} = \mathbf{BC}$.

Jag följer teorin på övre halvan av sidan 36 i Gröna häftet.

Först transformerar jag \mathbf{M} med hjälp av matlabfunktionen *rref* till en matris \mathbf{T} på trappstegsform. På köpet erhålls en vektor *beta* som talar om vilka kolonner som svarar mot trappstegsettor i \mathbf{T} .

Då är $r =$ antalet icke-nollrader i $\mathbf{T} =$ antalet element i vektorn *beta*.

Som matrisen \mathbf{C} väljer jag de första r raderna i \mathbf{T} ,

och som matrisen \mathbf{B} väljer jag de kolonner i \mathbf{M} som ges av vektorn *beta*.

Slutligen kontrollerar jag att $\mathbf{BC} = \mathbf{M}$.

Mina erhållna \mathbf{B} och \mathbf{C} blev:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -40 & -48 & 8 \\ -44 & -22 & -14 \\ 35 & -12 & 31 \\ 30 & 57 & -23 \\ 86 & 79 & 3 \\ -155 & -107 & -28 \\ 75 & 36 & 23 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5.0000 & 2.3125 \\ 0 & 1 & 0 & -6.0000 & -4.0625 \\ 0 & 0 & 1 & -9.0000 & -5.3125 \end{bmatrix}$$

Matlabkörning bifogas.

```

M =
  -40  -48   8  16  60
  -44  -22 -14  38  62
   35  -12  31 -32 -35
   30   57 -23  15 -40
   86   79   3 -71 -138
 -155 -107 -28 119 225
   75   36  23 -48 -95

>> [T,beta]=rref(M)

T =
  1.0000         0         0   5.0000   2.3125
         0   1.0000         0  -6.0000  -4.0625
         0         0   1.0000  -9.0000  -5.3125
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0

beta =     1     2     3

>> B=M(:,beta)

B =
  -40  -48   8
  -44  -22 -14
   35  -12  31
   30   57 -23
   86   79   3
 -155 -107 -28
   75   36  23

>> r=length(beta)

r =     3

>> C=T(1:r,:)

C =
  1.0000         0         0   5.0000   2.3125
         0   1.0000         0  -6.0000  -4.0625
         0         0   1.0000  -9.0000  -5.3125

```

```
>> BC=B*C
```

```
BC =
```

```
-40  -48   8   16   60  
-44  -22  -14  38   62  
 35  -12   31  -32  -35  
 30   57  -23   15  -40  
 86   79   3  -71 -138  
-155 -107  -28  119  225  
 75   36   23  -48  -95
```

```
>> M-BC
```

```
ans =
```

```
 0   0   0   0   0  
 0   0   0   0   0  
 0   0   0   0   0  
 0   0   0   0   0  
 0   0   0   0   0  
 0   0   0   0   0  
 0   0   0   0   0
```

Hemuppgift 1.2

Givet är min matris $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & -5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 5 & 12 \\ -3 & 3 & 3 & 0 & 9 \\ -4 & -2 & -2 & -5 & -6 \end{bmatrix} = A_{mar}$.

Uppgiften går ut på att bestämma en LU-faktorisering av \mathbf{A} .

Jag startar med att låta $\mathbf{U} = \mathbf{A}$ och $\mathbf{L} = \mathbf{I}$.

I iteration k av algoritmen dras multiplar av rad k från raderna nedanför rad k i \mathbf{U} .

Multiplarna väljs så att elementen nedanför diagonalelementet i kolonn k i \mathbf{U} blir 0:or.

I motsvarande element i \mathbf{L} (dvs elementen nedanför diagonalelementet i kolonn k) placeras de nyssnämnda multiplarna.

Jag skriver ut de aktuella matriserna \mathbf{U} och \mathbf{L} efter varje iteration.

Slutligen kontrollerar jag att $\mathbf{LU} = \mathbf{A}$.

Mina erhållna \mathbf{L} och \mathbf{U} blev:

$\mathbf{L} =$

$$\begin{array}{ccccc} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2222 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6667 & 0.7895 & 1.0000 & 0 & 0 \\ -0.3333 & 0.7895 & 2.7273 & 1.0000 & 0 \\ -0.4444 & -0.3684 & -1.2727 & -0.2222 & 1.0000 \end{array}$$

$\mathbf{U} =$

$$\begin{array}{ccccc} 9.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 2.0000 \\ 0 & 4.2222 & 0.2222 & -4.7778 & 6.4444 \\ 0 & 0 & 1.1579 & 8.1053 & 5.5789 \\ 0 & 0 & 0 & -18.0000 & -10.6364 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.0000 \end{array}$$

Matlabkod och utskrifter bifogas.

I m-filen betecknar \mathbf{q} vektorn med ovannämnda multiplar.

```

% m-filen hem1.m

L = eye(n);
U = A;
for k = 1:n-1
    k1 = k+1;
    q = (1/U(k,k))*U(k1:n,k);
    U(k1:n,:) = U(k1:n,:) - q*U(k,:)
    L(k1:n,k) = q
end

% Körning:

>> A = [ 9 1 1 1 2
-2 4 0 -5 6
6 4 2 5 12
-3 3 3 0 9
-4 -2 -2 -5 -6 ]

A =

     9     1     1     1     2
    -2     4     0    -5     6
     6     4     2     5    12
    -3     3     3     0     9
    -4    -2    -2    -5    -6

>> n=5;

>> hem1

U =

    9.0000    1.0000    1.0000    1.0000    2.0000
     0    4.2222    0.2222   -4.7778    6.4444
     0    3.3333    1.3333    4.3333   10.6667
     0    3.3333    3.3333    0.3333    9.6667
     0   -1.5556   -1.5556   -4.5556   -5.1111

L =

    1.0000     0     0     0     0
   -0.2222    1.0000     0     0     0
    0.6667     0    1.0000     0     0
   -0.3333     0     0    1.0000     0
   -0.4444     0     0     0    1.0000

```

U =

9.0000	1.0000	1.0000	1.0000	2.0000
0	4.2222	0.2222	-4.7778	6.4444
0	0	1.1579	8.1053	5.5789
0	0	3.1579	4.1053	4.5789
0	0	-1.4737	-6.3158	-2.7368

L =

1.0000	0	0	0	0
-0.2222	1.0000	0	0	0
0.6667	0.7895	1.0000	0	0
-0.3333	0.7895	0	1.0000	0
-0.4444	-0.3684	0	0	1.0000

U =

9.0000	1.0000	1.0000	1.0000	2.0000
0	4.2222	0.2222	-4.7778	6.4444
0	0	1.1579	8.1053	5.5789
0	0	-0.0000	-18.0000	-10.6364
0	0	0.0000	4.0000	4.3636

L =

1.0000	0	0	0	0
-0.2222	1.0000	0	0	0
0.6667	0.7895	1.0000	0	0
-0.3333	0.7895	2.7273	1.0000	0
-0.4444	-0.3684	-1.2727	0	1.0000

U =

9.0000	1.0000	1.0000	1.0000	2.0000
0	4.2222	0.2222	-4.7778	6.4444
0	0	1.1579	8.1053	5.5789
0	0	-0.0000	-18.0000	-10.6364
0	0	0.0000	0	2.0000

L =

1.0000	0	0	0	0
-0.2222	1.0000	0	0	0
0.6667	0.7895	1.0000	0	0
-0.3333	0.7895	2.7273	1.0000	0
-0.4444	-0.3684	-1.2727	-0.2222	1.0000

```
>> LU=L*U
```

```
LU =
```

```
  9.0000  1.0000  1.0000  1.0000  2.0000  
 -2.0000  4.0000  0      -5.0000  6.0000  
  6.0000  4.0000  2.0000  5.0000 12.0000  
 -3.0000  3.0000  3.0000  0      9.0000  
 -4.0000 -2.0000 -2.0000 -5.0000 -6.0000
```

```
>> LU-A
```

```
ans =
```

```
  1.0e-15 *  
  0      0      0      0      0  
  0      0      0      0      0  
  0      0      0     -0.8882  0  
  0      0      0      0      0  
  0      0     -0.4441  0      0
```

```
>> diary off
```