

1. Kompletterande uppgifter till Övning 1.

Givet är följande vektorer i \mathbb{R}^m :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

samt följande matris i $\mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\hat{\mathbf{a}}_1 \quad \hat{\mathbf{a}}_2 \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{a}}_n] = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1^\top \\ \bar{\mathbf{a}}_2^\top \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_m^\top \end{bmatrix},$$

där $\hat{\mathbf{a}}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ och $\bar{\mathbf{a}}_i^\top = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in})$, dvs $\bar{\mathbf{a}}_i \in \mathbb{R}^n$.

Enhetsmatrisen i \mathbb{R}^m betecknas \mathbf{I} , dvs $\mathbf{I} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_m]$.

Illustrera följande matriser, där t är givet reellt tal som uppfyller $t \neq 0$, medan k och ℓ är givna heltal sådana att $k \in \{1, \dots, m\}$, $\ell \in \{1, \dots, m\}$ och $k \neq \ell$.

1. $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^\top$
2. $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_\ell^\top$
3. $\sum_{i=1}^m \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top$
4. $\mathbf{e}_k \mathbf{b}^\top$
5. $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^\top \mathbf{A}$
6. $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_\ell^\top \mathbf{A}$
7. $\sum_{i=1}^m \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top \mathbf{A}$
8. $\mathbf{I} - \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^\top - \mathbf{e}_\ell \mathbf{e}_\ell^\top + \mathbf{e}_k \mathbf{e}_\ell^\top + \mathbf{e}_\ell \mathbf{e}_k^\top$
9. $(\mathbf{I} - \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^\top - \mathbf{e}_\ell \mathbf{e}_\ell^\top + \mathbf{e}_k \mathbf{e}_\ell^\top + \mathbf{e}_\ell \mathbf{e}_k^\top) \mathbf{A}$
10. $\mathbf{I} + (t-1) \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^\top$
11. $(\mathbf{I} + (t-1) \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^\top) \mathbf{A}$
12. $\mathbf{I} + t \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_\ell^\top$
13. $(\mathbf{I} + t \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_\ell^\top) \mathbf{A}$

Verifiera att matrisen i 8 har sig själv till invers.

Verifiera att matrisen i 10 har inversen $\mathbf{I} + (\frac{1}{t} - 1) \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^\top$.

Verifiera att matrisen i 12 har inversen $\mathbf{I} - t \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_\ell^\top$.

Observera att matrismultiplikationerna i 9, 11 och 13 svarar mot de radoperationer som används vid Gauss-Jordans metod för att överföra en given matris till trappstegsform.

Därför är det betryggande att de tre matriserna i 8, 10 och 12 är icke-singulära.