



KTH Matematik

**Tentamen i 5B1760 Linjär och kvadratisk optimering.  
Onsdag 24 augusti 2005 kl. 14.00–19.00**

*Examinator:* Krister Svanberg, tel. 790 71 37

*Tillåtna hjälpmedel:* Penna, suddgummi och linjal. Ett formelblad delas ut vid tentamen.

*Bonus:* Den som har minst 4 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a).

Den som har minst 8 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över 1(a) och 1(b).

Den som har minst 10 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 24 poäng.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Lös följande LP-problem grafiskt i en stor och noggrann figur, med utritat tillåtet område och några lämpligt valda nivåkurvor till målfunktionen.

$$\begin{array}{ll} \text{maximera} & 2x_1 - x_2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -x_1 - x_2 \leq 5 \end{array}$$

Ange den optimala lösningen samt problemets optimalvärde. ....(4p)

- (b) Bestäm både det största och det minsta värde som  $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$  kan anta om  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  måste uppfylla  $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1$ . ....(4p)

- (c) Utför en  $\text{LDL}^T$ -faktorisering av matrisen  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 10 & 25 & 30 \\ 15 & 30 & 55 \end{bmatrix}$  och avgör med hjälp av denna faktorisering om  $\mathbf{H}$  är positivt definit eller ej. ....(2p)

2. I denna uppgift är  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 10 & 13 \end{bmatrix}$ .

Bestäm en bas till vart och ett av de fyra fundamentala underrummen till  $\mathbf{A}$ , dvs till  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ ,  $\mathcal{R}(\mathbf{A}^T)$ ,  $\mathcal{N}(\mathbf{A})$  och  $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$ . ....(10p)

3. Betrakta följande LP-problem.

$$\begin{array}{rllll} \text{minimera} & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & & \geq 6 \\ & & & x_2 & + & x_3 \geq 4 \\ & x_1 & & & & \geq 0 \\ & & & x_2 & & \geq 0 \\ & & & & & x_3 \geq 0 \end{array}$$

- (a) Bestäm den baslösning  $\mathbf{x}$  som svarar mot indexvektorerna  $\alpha = (1, 2, 5)$  och  $\gamma = (3, 4)$ , dvs den lösning som erhålls om bivillkoren nummer 1, 2 och 5 är uppfyllda med likhet, och visa att  $\mathbf{x}$  är en *tillåten* baslösning. .... (5p)
- (b) Visa att den lösning  $\mathbf{x}$  som du just beräknat i (a)-uppgiften i själva verket är en *optimal* lösning till problemet. .... (5p)
4. Lös följande kvadratiska optimeringsproblem med valfri metod.

$$\begin{array}{r} \text{minimera} \quad \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \\ \text{då} \quad 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 20, \\ \quad \quad x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 30. \end{array}$$

Ange även problemets optimalvärde. ....(10p)

5. Låt  $\mathcal{U}$  och  $\mathcal{V}$  vara följande båda delmängder av  $\mathbb{R}^4$ :

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{R}\mathbf{u} = \mathbf{p}\}, \text{ där } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{S}\mathbf{v} = \mathbf{q}\}, \text{ där } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm det kortaste avståndet mellan  $\mathcal{U}$  och  $\mathcal{V}$ . Ange även de båda punkter  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}$  och  $\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$  mellan vilka avståndet är som minst. .... (10p)

**Lycka till!**