KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1760 Linjär och kvadratisk optimering.
Torsdag 19 december 2002, klockan 8.00 – 13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. Ett formelblad delas ut vid tentamen.

Bonus: Den som har minst 4 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a).
Den som har minst 8 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över 1(a) och 1(b).
Den som har minst 10 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 24 poäng.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Utför en QR–faktorisering av matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. .... (4p)

(b) Avgör om följande symmetriska matris $\mathbf{H}$ är positivt definit eller ej.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Använd dig förslagsvis av LDL^T-faktorisering. .... (4p)

(c) Låt P beteckna följande LP-problem:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{minimera} & 5x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{då} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 6 \\ & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 6 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 7 \\ & x_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & & & \geq & 0 \\ & & & & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Formulera det motsvarande duala problemet D, och avgör om följande påstående är korrekt: $\hat{\mathbf{x}} = (2 \;\; 2 \;\; 1)^\mathsf{T}$ är en optimal lösning till P och $\hat{\mathbf{y}} = (0 \;\; 1 \;\; 2)^\mathsf{T}$ är en optimal lösning till D. .... (2p)

2. Lös följande kvadratiska optimeringsproblem med valfri metod.

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \\ \text{då} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4. \end{aligned}$$

Ange även problemets optimalvärde. ....(10p)

3. Lös följande LP-problem med Simplexmetoden.
Starta från den givna hörnlösningen $\mathbf{x} = (\,0 \;\; 0 \;\; 0\,)^\mathsf{T}$.

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{minimera} & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\ \text{då} & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & -4 \\ & x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & \geq & -6 \\ & x_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & & & \geq & 0 \\ & & & & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Ledning: Det krävs ≤ 2 iterationer (om du räknar rätt). ....(10p)

4. Givet en matris $\mathbf{A}$ så vill man ibland bestämma den *största* möjliga respektive den *minsta* möjliga längden på vektorn $\mathbf{Ax}$ då vektorn $\mathbf{x}$ har längden 1.
Detta kan göras genom att man löser de båda optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rlcrl} \text{maximera} & |\mathbf{Ax}|^2 & \text{respektive} & \text{minimera} & |\mathbf{Ax}|^2 \\ \text{då} & |\mathbf{x}|^2 = 1 & & \text{då} & |\mathbf{x}|^2 = 1 \end{array}$$

där $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ betecknar längden i kvadrat på vektorn $\mathbf{x}$, medan
$|\mathbf{Ax}|^2 = (\mathbf{Ax})^\mathsf{T}(\mathbf{Ax})$ betecknar längden i kvadrat på vektorn $\mathbf{Ax}$.

Lös ovanstående båda optimeringsproblem för fallet att $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Ange sedan den största möjliga respektive den minsta möjliga längden på vektorn $\mathbf{Ax}$ då vektorn $\mathbf{x}$ har längden 1. ....(10p)

5. I denna uppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestäm en vektor $\mathbf{p} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ och en vektor $\mathbf{q} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ sådana att $\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$. ....(5p)

(b) Bestäm en vektor $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ och en vektor $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ sådana att $\mathbf{c} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$. ....(5p)