



KTH Matematik

**Tentamen i 5B1760 Linjär och kvadratisk optimering.
Onsdag 17 december 2003 kl. 14.00–19.00**

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. Ett formelblad delas ut vid tentamen.

Bonus: Den som har minst 4 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a).

Den som har minst 8 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över 1(a) och 1(b).

Den som har minst 10 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 24 poäng.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

1. (a) Bestäm dels en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ (bildrummet till \mathbf{A}),

$$\text{dels en bas till } \mathcal{R}(\mathbf{A}^T) \text{ (bildrummet till } \mathbf{A}^T), \text{ då } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}. \dots (4p)$$

- (b) Följande båda LP-problem, kallade P och D, är varandras duala problem.

$$\begin{array}{ll} \text{P : minimera} & 6x_1 + 7x_2 \\ \text{då} & 2x_1 + 5x_2 \geq 8, \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 9, \\ & x_1 \text{ och } x_2 \geq 0. \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{D : maximera} & 8y_1 + 9y_2 \\ \text{då} & 2y_1 + 3y_2 \leq 6, \\ & 5y_1 + 4y_2 \leq 7, \\ & y_1 \text{ och } y_2 \geq 0. \end{array}$$

Avgör för vart och ett av följande fyra påståenden om påståendet är sant eller inte. Vi använder förkortningen opt.lösn. = optimal lösning.

- 1.) $\mathbf{x} = (4, 0)^T$ är en opt.lösn. till P och $\mathbf{y} = (0, \frac{7}{5})^T$ är en opt.lösn. till D.
- 2.) $\mathbf{x} = (4, 0)^T$ är en opt.lösn. till P och $\mathbf{y} = (3, 0)^T$ är en opt.lösn. till D.
- 3.) $\mathbf{x} = (0, \frac{9}{4})^T$ är en opt.lösn. till P och $\mathbf{y} = (0, \frac{7}{4})^T$ är en opt.lösn. till D.
- 4.) $\mathbf{x} = (0, 0)^T$ är en opt.lösn. till P och $\mathbf{y} = (0, 0)^T$ är en opt.lösn. till D.

Motivera varje svar! (4p)

(c) Utför en QR-faktorisering av matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (2p)

2. Givet $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Bestäm en lösning $\bar{\mathbf{x}}$ till ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. (Systemet har oändligt många lösningar men här behöver du bara ange en av dessa.) (1p)
- (b) Bestäm en matris \mathbf{Z} vars kolonner utgör en bas till nollrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. .. (4p)
- (c) Lös problemet att minimera $\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ då $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (5p)

3. Betrakta följande LP-problem.

$$\begin{array}{rll} \text{minimera} & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \\ \text{då} & x_1 + x_2 & \geq 4 \\ & x_2 + x_3 & \geq 6 \\ & x_1 & \geq 0 \\ & x_2 & \geq 0 \\ & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

- (a) Bestäm den baslösning \mathbf{x} som svarar mot indexvektorerna $\alpha = (1, 2, 4)$ och $\gamma = (3, 5)$, dvs den lösning som erhålls om bivillkoren nummer 1, 2 och 4 är uppfyllda med likhet, och visa att \mathbf{x} är en *tillåten* baslösning. (2p)
- (b) Lös LP-problemet med Simplexmetoden. Starta från den tillåtna baslösning \mathbf{x} som du beräknade i (a)-uppgiften. (8p)

4. I denna uppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Betrakta problemet att minimera $|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}|^2$ då $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.
Bestäm minsta-normlösningen till detta minsta-kvadratproblem. (7p)
- (b) Bestäm den vektor \mathbf{v} som utgör ortogonala projektionen av vektorn \mathbf{b} på underrummet $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, samt den vektor \mathbf{w} som utgör ortogonala projektionen av vektorn \mathbf{b} på underrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$ (3p)

5. I denna uppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Det visar sig att det största singularvärdet till \mathbf{A} är $\sigma_1 = 5$, medan övriga singularvärden är < 5 . Givet denna information så är dina uppgifter följande:

- (a) Bestäm en optimal lösning $\hat{\mathbf{x}}$ till problemet att maximera $|\mathbf{Ax}|$ då $|\mathbf{x}| = 1$.
Motivera svaret ordentligt! (6p)
- (b) Bestäm den matris \mathbf{X} av rangen 1 som bäst approximerar \mathbf{A} bland alla matriser av rangen 1, i den vanliga betydelsen att $\sum_i \sum_j (x_{ij} - a_{ij})^2$ minimeras. . (4p)

Lycka till!