Svar till tentamen i 5B1760 Linjär och kvadratisk optimering, 19 december 2002.

Uppgift 1.(a)

Låt $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$ beteckna kolonnerna i den givna matrisen $\mathbf{A}$.
Vi ska bestämma två *ortonormala* vektorer $\mathbf{q}_1$ och $\mathbf{q}_2$ som spänner upp samma underrum som $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$. Gram-Schmidts metod ger att:

$\mathbf{p}_1 = \mathbf{a}_1$ och $\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_1/|\mathbf{p}_1| = (\,\frac{2}{3}\;\;\frac{2}{3}\;\;\frac{1}{3}\,)^\mathsf{T}$.

$\mathbf{p}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1^\mathsf{T}\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{q}_1 = (\,0\;\;2\;\;2\,)^\mathsf{T} - 2\cdot(\,\frac{2}{3}\;\;\frac{2}{3}\;\;\frac{1}{3}\,)^\mathsf{T} = (\,-\frac{4}{3}\;\;\frac{2}{3}\;\;\frac{4}{3}\,)^\mathsf{T}$.

$\mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_2/|\mathbf{p}_2| = \mathbf{p}_2/2 = (\,-\frac{2}{3}\;\;\frac{1}{3}\;\;\frac{2}{3}\,)^\mathsf{T}$.

Nu är $\mathbf{a}_1 = |\mathbf{p}_1|\cdot\mathbf{q}_1 = 3\cdot\mathbf{q}_1$ och

$\mathbf{a}_2 = (\mathbf{q}_1^\mathsf{T}\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{q}_1 + |\mathbf{p}_2|\cdot\mathbf{q}_2 = 2\cdot\mathbf{q}_1 + 2\cdot\mathbf{q}_2$.

Detta innebär att

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{QR}.$$

Uppgift 1.(b)

Först LU-faktoriseras den symmetriska matrisen $\mathbf{H}$ utan några radbyten. Om därvid alla diagonalelement i $\mathbf{U}$ blir > 0 så är $\mathbf{U} = \mathbf{DL}^\mathsf{T}$, där diagonalelementen i diagonalmatrisen $\mathbf{D}$ består av diagonalelementen i $\mathbf{U}$, varvid $\mathbf{H} = \mathbf{LDL}^\mathsf{T}$ är positivt definit.

$$\text{Starta med } \mathbf{L} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{U} = \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Utför sedan Gausselimination på $\mathbf{U}$, dvs radoperationer som överför $\mathbf{U}$ till en uppåt triangulär matris, genom att upprepat dra lämpliga multiplar av en rad från raderna nedanför.
De använda multiplarna bygger upp den nedåt triangulära matrisen $\mathbf{L}$.

Drag först -1 gånger första raden i $\mathbf{U}$ från andra raden i $\mathbf{U}$ (dvs addera rad 1 till rad 2).

$$\text{Det ger } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Drag sedan -1 gånger andra raden i $\mathbf{U}$ från tredje raden i $\mathbf{U}$ (dvs addera rad 2 till rad 3).

$$\text{Det ger } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Drag sedan -1 gånger tredje raden i $\mathbf{U}$ från fjärde raden i $\mathbf{U}$ (dvs addera rad 3 till rad 4).

$$\text{Det ger } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Drag sedan -1 gånger fjärde raden i $\mathbf{U}$ från femte raden i $\mathbf{U}$ (dvs addera rad 4 till rad 5).

$$\text{Det ger } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Därmed har vi beräknat $\mathbf{L}$ och $\mathbf{U}$. Eftersom diagonalelementen i $\mathbf{U}$ blev > 0 så "lyckades" $\mathrm{LDL}^{\mathsf{T}}$-faktoriseringen.

$$\text{Vi har att } \mathbf{H} = \mathbf{LDL}^{\mathsf{T}}, \text{ där } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uppgift 1.(c)

Det duala problemet D kan skrivas:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{maximera} & 6y_1 & + & 6y_2 & + & 7y_3 & & \\ \text{då} & y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & \leq & 5 \\ & 2y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \leq & 3 \\ & y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \leq & 4 \\ & y_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & & y_2 & & & \geq & 0 \\ & & & & & y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Enligt dualitetssatsen gäller att $\hat{\mathbf{x}}$ och $\hat{\mathbf{y}}$ är optimala lösningar till P resp D om och endast om $\hat{\mathbf{x}}$ uppfyller alla bivillkoren i P, $\hat{\mathbf{y}}$ uppfyller alla bivillkoren i D samt $\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{y}}$.
Med $\hat{\mathbf{x}} = (\,2 \;\; 2 \;\; 1\,)^{\mathsf{T}}$ får vi genom insättning att alla 6 bivillkoren i P blir uppfyllda.
Med $\hat{\mathbf{y}} = (\,0 \;\; 1 \;\; 2\,)^{\mathsf{T}}$ får vi genom insättning att alla 6 bivillkoren i D blir uppfyllda.
Slutligen är $\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{x}} = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 20$, medan $\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{y}} = 6 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 20$.
Påståendet var alltså korrekt.

Uppgift 2.

Vi har här ett QP-problem på formen: minimera $\frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

där $\mathbf{H} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Matrisen $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ är positivt definit, så optimal lösning ges ur ekvationssystemet

$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{A}^\mathsf{T} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$, som i vårt fall blir

$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}^\mathsf{T} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$, dvs $\mathbf{I}\,\mathbf{x} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Ur de första ekvationerna erhålls $\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}$, som insatt i $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ger systemet

$\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{b}$, dvs $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$, med lösningen $\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Därmed är $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ en optimal lösning till problemet.

Problemets optimalvärde ges av $\frac{1}{2}(2^2 + 1^2 + 3^2 + 0^2) = 7$.

Uppgift 3.

Problemet är på formen: minimera $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$,

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Första iterationen:

Vi startar första iterationen med $\alpha = (3, 4, 5)$ och $\gamma = (1, 2)$. Då är

$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_\gamma = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b}_\gamma = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Motsvarande baslösning $\mathbf{x}$ erhålls ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\alpha\mathbf{x} = \mathbf{b}_\alpha$, dvs

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Sedan beräknas vektorn $\mathbf{s}_\gamma = \mathbf{A}_\gamma\mathbf{x} - \mathbf{b}_\gamma = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Därefter beräknas vektorn **u** ur $\mathbf{A}_\alpha^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{c}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $u_2 < 0$ (medan både u_1 och u_3 är > 0) sätter vi $q = 2$ och beräknar vektorn **d** ur $\mathbf{A}_\alpha \mathbf{d} = \mathbf{e}_2$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kantlinjen ges nu av $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + t \cdot \mathbf{d}$ med **x** och **d** enligt ovan.

Vidare beräknas vektorn $\mathbf{g}_\gamma = \mathbf{A}_\gamma \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Nu är $\mathbf{x}(t)$ en tillåten lösning för varje $t \geq 0$ sådant att $\mathbf{s}_\gamma + t \cdot \mathbf{g}_\gamma \geq \mathbf{0}$.

Eftersom $\mathbf{g}_\gamma$ *inte* är $\geq \mathbf{0}$ beräknar vi $\hat{t} = \min_j \left\{ \frac{s_{\gamma_j}}{-g_{\gamma_j}} \mid g_{\gamma_j} < 0 \right\} = \min \left\{ \frac{4}{1}, \frac{6}{3} \right\} = 2$.

Minsta kvoten inträffade för γ_2, vilket betyder att vi sätter $p = 2$.
Iterationen avslutas med att $\alpha_q = \alpha_2 = 4$ och $\gamma_p = \gamma_2 = 2$ byter plats.

Andra iterationen:

Nu är $\alpha = (3, 2, 5)$ och $\gamma = (1, 4)$. Då är

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}_\gamma = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b}_\gamma = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Motsvarande baslösning **x** erhålls ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}_\alpha$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sedan beräknas vektorn $\mathbf{s}_\gamma = \mathbf{A}_\gamma \mathbf{x} - \mathbf{b}_\gamma = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Därefter beräknas vektorn **u** ur $\mathbf{A}_\alpha^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{c}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ så är den aktuella baslösningen $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en optimal lösning.

Därmed är vi klara och kan avbryta här!
Optimalvärdet till problemet ges av $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = -2$.

Uppgift 4.

Eftersom $|\mathbf{Ax}|^2 = (\mathbf{Ax})^\mathsf{T}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax}$ så kan de bägge problemen skrivas

$$\begin{array}{lcl} \text{maximera } \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Hx} & \text{respektive} & \text{minimera } \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Hx} \\ \text{då } |\mathbf{x}|^2 = 1 & & \text{då } |\mathbf{x}|^2 = 1 \end{array}$$

där $\mathbf{H} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$.

En optimal lösning till det *vänstra* problem erhålls genom att låta $\mathbf{x}$ vara en normerad egenvektor svarande mot det *största* egenvärdet till matrisen $\mathbf{H}$.

En optimal lösning till det *högra* problem erhålls genom att låta $\mathbf{x}$ vara en normerad egenvektor svarande mot det *minsta* egenvärdet till matrisen $\mathbf{H}$.

Egenvärdena till $\mathbf{H}$ erhålls ur karakteristiska ekvationen $\det(\mathbf{H} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = 0$, vilket ger $(6-\lambda)(6-\lambda) - 1 = 0$, med lösningarna $\lambda_1 = 7$ och $\lambda_2 = 5$.

Egenvektorer svarande mot det största egenvärdet $\lambda_1 = 7$ ges ur ekvationssystemet $(\mathbf{H} - 7 \cdot \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dvs $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, där k är en godtycklig konstant. Genom att välja k så att $\mathbf{x}$ får längden 1 (och därmed uppfyller det givna bivillkoret $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 1$) så erhålls den till det vänstra problemet optimala lösningen $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ (eller alternativt $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$).

Det vänstra problemets optimalvärde = $\hat{\mathbf{x}}^\mathsf{T}\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} = 7$, dvs $|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}| = \sqrt{7}$.

Egenvektorer svarande mot det minsta egenvärdet $\lambda_1 = 5$ ges ur ekvationssystemet $(\mathbf{H} - 5 \cdot \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dvs $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, där k är en godtycklig konstant. Genom att välja k så att $\mathbf{x}$ får längden 1 (och därmed uppfyller det givna bivillkoret $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 1$) så erhålls den till det högra problemet optimala lösningen $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ (eller alternativt $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$).

Det högra problemets optimalvärde = $\bar{\mathbf{x}}^\mathsf{T}\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} = 5$, dvs $|\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}| = \sqrt{5}$.

Den största möjliga längden på vektorn $\mathbf{Ax}$ då vektorn $\mathbf{x}$ har längden 1 ges därmed av $|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}| = \sqrt{7}$. medan den minsta möjliga längden på vektorn $\mathbf{Ax}$ då vektorn $\mathbf{x}$ har längden 1 ges av $|\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}| = \sqrt{5}$.

Uppgift 5.

Uppgiften kan lösas på flera olika sätt. Här presenterar vi ett av dessa.

Först bestämmer vi en bas till vart och ett av de fyra fundamentala underrummen till $\mathbf{A}$ (dvs $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$) genom att utföra radoperationer (Gauss-Jordan) som överför matrisen $\mathbf{A}$ till trappstegsform. Dessa radoperationer motsvarar mutiplikation från vänster med en viss matris $\mathbf{P}$. För att hålla reda på denna matris $\mathbf{P}$ placerar vi till höger om $\mathbf{A}$ en enhetsmatris $\mathbf{I}$ och låter radoperationerna verka även på denna. Dessa extra kolonner är "passiva" och påverkar inte valet av radoperationer.

Vi utgår alltså från matrisen $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Efter några få enkla radoperationer erhålls matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{O} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}$,

där $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Därmed är $\mathbf{A}$ överförd till trappstegsform med *två* trappstegsettor.

En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i $\mathbf{A}$ som svarar mot trappstegsettor i $\mathbf{U}$, dvs i vårt fall de två första kolonnerna i $\mathbf{A}$.
Basen består alltså av de två vektorerna $(1\ \ 0\ \ 3\ \ 0)^\mathsf{T}$ och $(0\ \ 2\ \ 0\ \ 4)^\mathsf{T}$

En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ erhålls genom att som basvektorer välja kolonnerna i $\mathbf{U}^\mathsf{T}$.
Basen består alltså av de två vektorerna $(1\ \ 0\ \ 1)^\mathsf{T}$ och $(0\ \ 1\ \ 1)^\mathsf{T}$.

En bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ erhålls genom att som basvektorer välja kolonnerna i $\mathbf{P}_2^\mathsf{T}$.
Basen består alltså av de två vektorerna $(-3\ \ 0\ \ 1\ \ 0)^\mathsf{T}$ och $(0\ \ -2\ \ 0\ \ 1)^\mathsf{T}$

En bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ har dimensionen 1, och en basvektor kan bestämmas enligt följande:
Sätt $x_3 = 1$ och välj sedan x_1 och x_2 så att $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$, dvs $x_1 = x_2 = -1$.
Basen består alltså av vektorn $(-1\ \ -1\ \ 1)^\mathsf{T}$.

Den givna vektorn $\mathbf{b}$ ska nu delas upp i två (ortogonala) delar $\mathbf{p} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ och $\mathbf{q} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

Eftersom vi bestämt baser till underrummen så vet vi att $\mathbf{p} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ och $\mathbf{q} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ är ekvivalent med att $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ respektive $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$,

för några skälärer v_1, v_2, w_1 och w_2.

Kravet att $\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{b}=(1\ 1\ 1\ 1)^{\mathsf{T}}$ medför att dessa skalärer ges av ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$, med lösningen (erhållen mha Gauss-elimination)

$v_1 = 0.4,\ v_2 = 0.3,\ w_1 = -0.2$ och $w_2 = -0.2$.

Därmed är $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \\ -0.2 \\ -0.2 \end{pmatrix}$.

Man kan notera att eftersom $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ är varandras ortogonala komplement så är $\mathbf{p}$ ortogonala projektionen av $\mathbf{b}$ på $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ och $\mathbf{q}$ ortogonala projektionen av $\mathbf{b}$ på $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$.

Nu ska den givna vektorn $\mathbf{c}$ delas upp i två (ortogonala) delar $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ och $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Eftersom vi bestämt baser till underrummen så vet vi att $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ och $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ är ekvivalent med att $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ respektive $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot w_1$,

för några skälärer v_1, v_2 och w_1.

Kravet att $\mathbf{y}+\mathbf{z}=\mathbf{c}=(1\ 1\ 1)^{\mathsf{T}}$ medför att dessa skalärer ges av ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$, med lösningen (erhållen mha Gauss-elimination)

$v_1 = 2/3,\ v_2 = 2/3$ och $w_1 = -1/3$.

Därmed är $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-1/3) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

Man kan notera att eftersom $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ är varandras ortogonala komplement så är $\mathbf{y}$ ortogonala projektionen av $\mathbf{c}$ på $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ och $\mathbf{z}$ ortogonala projektionen av $\mathbf{c}$ på $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Alltså: $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \\ -0.2 \\ -0.2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.