

Lösningar till tentan i 5B1760 Linjär och kvadratisk optimering, 17 december 2003.

Uppgift 1.(a)

Vi använder Gauss-Jordans metod för att överföra $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ till trappstegsform.

Addition av (-1) gånger första raden till andra raden, samt addition av (-1) gånger första raden till tredje raden, ger till resultat matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Addition av (-1) gånger andra raden till första raden, samt addition av (-2) gånger andra raden till tredje raden, ger till resultat matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}$.

En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ ges då av de kolonner i \mathbf{A} som svarar mot trappstegssetor i \mathbf{T} , dvs av vektorerna $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1)^\top$ och $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 3)^\top$.

Låt matrisen \mathbf{U} bestå av de nollskilda raderna i \mathbf{T} , dvs de två översta raderna i \mathbf{T} .

En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\top)$ ges då av kolonnerna i \mathbf{U}^\top , dvs av vektorerna $(1, 0, 1, 1)^\top$ och $(0, 1, 1, 2)^\top$.

Uppgift 1.(b)

Angående första påståendet:

$\mathbf{x} = (4, 0)^\top$ är en tillåten lösning till P och $\mathbf{y} = (0, \frac{7}{5})^\top$ är en tillåten lösning till D.

Så långt är allt väl. Men $6x_1 + 7x_2 = 24$ medan $8y_1 + 9y_2 = 12.6 \neq 24$.

Enligt dualitetssatsen är därmed påstående nr 1 *inte* sant.

Angående andra påståendet:

Med $\mathbf{x} = (4, 0)^\top$ och $\mathbf{y} = (3, 0)^\top$ så gäller visserligen att $6x_1 + 7x_2 = 24 = 8y_1 + 9y_2$.

Men \mathbf{y} uppfyller inte alla bivillkor i D, så \mathbf{y} är inte en tillåten lösning till D.

Påstående nr 2 är därmed *inte* sant.

Angående tredje påståendet:

Med $\mathbf{x} = (0, \frac{9}{4})^\top$ och $\mathbf{y} = (0, \frac{7}{4})^\top$ så gäller för det första att \mathbf{x} uppfyller alla bivillkor i P, för det andra att \mathbf{y} uppfyller alla bivillkor i D, och för det tredje att $6x_1 + 7x_2 = 15.75 = 8y_1 + 9y_2$.

Enligt dualitetssatsen är därmed påstående nr 3 *sant*.

Angående fjärde påståendet:

Med $\mathbf{x} = (0, 0)^\top$ och $\mathbf{y} = (0, 0)^\top$ så gäller visserligen att $6x_1 + 7x_2 = 0 = 8y_1 + 9y_2$.

Men \mathbf{x} uppfyller inte alla bivillkor i P, så \mathbf{x} är inte en tillåten lösning till P.

Påstående nr 4 är därmed *inte* sant.

Uppgift 1.(c)

Låt \mathbf{a}_1 och \mathbf{a}_2 beteckna kolonnerna i den givna matrisen \mathbf{A} .

Vi ska bestämma två *ortonormala* vektorer \mathbf{q}_1 och \mathbf{q}_2 som spänner upp samma underrum som \mathbf{a}_1 och \mathbf{a}_2 . Gram-Schmidts metod ger att:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{a}_1 = (1, -1, 1, 1)^\top. \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_1/|\mathbf{p}_1| = \mathbf{p}_1/2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\top.$$

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1^\top \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{q}_1 = (2, 0, 0, 2)^\top - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\top = (1, 1, -1, 1)^\top.$$

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_2/|\mathbf{p}_2| = \mathbf{p}_2/2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\top.$$

Nu är $\mathbf{a}_1 = |\mathbf{p}_1| \cdot \mathbf{q}_1 = 2 \cdot \mathbf{q}_1$ och $\mathbf{a}_2 = (\mathbf{q}_1^\top \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{q}_1 + |\mathbf{p}_2| \cdot \mathbf{q}_2 = 2 \cdot \mathbf{q}_1 + 2 \cdot \mathbf{q}_2$,

$$\text{vilket innebär att } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{QR}.$$

Uppgift 2.(a)

Vi utför radoperationer (Gauss-Jordan) på matrisen $[\mathbf{A} \quad \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Addition av (-1) gånger första raden till andra raden ger $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$.

Multiplikation av andra raden med $(-1/2)$ ger $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Addition av (-1) gånger andra raden till första raden ger $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Här ser vi att *en* (av flera) lösningar till $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ är $\bar{\mathbf{x}} = (4, 2, 0, 0)^\top$.

Uppgift 2.(b)

De radoperationer som just utfördes i (a)-uppgiften medför att ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ är ekvivalent med ekvationssystemet $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$, där $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matrisen \mathbf{U} är på trappstegsform, med två trappstegssetter. Nollrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ har därmed dimensionen $n - r = 4 - 2 = 2$, och två basvektorer kan bestämmas på följande sätt:

Först sätter man $x_3 = 1$ och $x_4 = 0$, varefter x_1 och x_2 väljs så att $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$, dvs $x_1 = -1$ och $x_2 = 0$. Det ger den ena basvektorn $\mathbf{z}_1 = (-1, 0, 1, 0)^\top$.

Sedan sätter man $x_4 = 1$ och $x_3 = 0$, varefter x_1 och x_2 väljs så att $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$, dvs $x_1 = 0$ och $x_2 = -1$. Det ger den andra basvektorn $\mathbf{z}_2 = (0, -1, 0, 1)^\top$.

En matris vars kolonner utgör en bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ är alltså $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Uppgift 2.(c)

Vi har ett QP-problem på formen: minimera $\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$,
där \mathbf{H} , \mathbf{c} , \mathbf{A} och \mathbf{b} är givna i texten.

En tillåten lösning $\bar{\mathbf{x}}$ och en nollrumsmatrix \mathbf{Z} ges enligt (a) och (b)-uppgifterna av

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Varje tillåten lösning \mathbf{x} kan nu skrivas på formen $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z}\mathbf{v}$, för $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

Optimalt \mathbf{v} erhålls genom att lösa ekvationssystemet $(\mathbf{Z}^\top \mathbf{H}\mathbf{Z})\mathbf{v} = -\mathbf{Z}^\top (\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})$,

som i vårt fall blir $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, med lösningen $\hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Optimal lösning till QP-problemet är då $\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z}\hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1.0 \\ 1.5 \\ 1.0 \end{pmatrix}$.

Uppgift 3.(a)

Vi har ett LP-problem på formen minimera $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$,

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Enligt instruktionen ska vi starta med $\alpha = (1, 2, 4)$ och $\gamma = (3, 5)$. Då är

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b}_\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man kan snabbt konstatera att matrisen \mathbf{A}_α är icke-singulär (exempelvis ger Gauss-Jordan till resultat 3 st trappstegsettor).

Motsvarande baslösning \mathbf{x} erhålls då ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}_\alpha$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Sedan beräknas vektorn $\mathbf{s}_\gamma = \mathbf{A}_\gamma \mathbf{x} - \mathbf{b}_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Eftersom $\mathbf{s}_\gamma \geq \mathbf{0}$ så är \mathbf{x} en tillåten baslösning.

Uppgift 3.(b)

Nu ska vi lösa problemet med Simplexmetoden, utgående från vår tillåtna baslösning \mathbf{x} .

Då beräknas vektorn \mathbf{u} ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\alpha^T \mathbf{u} = \mathbf{c}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $u_3 < 0$ sätter vi $q = 3$ och beräknar vektorn \mathbf{d} ur $\mathbf{A}_\alpha \mathbf{d} = \mathbf{e}_3$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Kantlinjen ges nu av $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + t \cdot \mathbf{d}$ med \mathbf{x} och \mathbf{d} enligt ovan.

$$\text{Vidare beräknas vektorn } \mathbf{g}_\gamma = \mathbf{A}_\gamma \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nu är $\mathbf{x}(t)$ en tillåten lösning för varje $t \geq 0$ sådant att $\mathbf{s}_\gamma + t \cdot \mathbf{g}_\gamma \geq \mathbf{0}$.

$$\text{Eftersom } \mathbf{g}_\gamma \text{ inte är } \geq \mathbf{0} \text{ beräknar vi } \hat{t} = \min_j \left\{ \frac{s_{\gamma_j}}{-g_{\gamma_j}} \mid g_{\gamma_j} < 0 \right\} = \min \left\{ \frac{4}{1}, \frac{6}{1} \right\} = 4.$$

Minsta kvoten inträffade för γ_1 , vilket betyder att vi sätter $p = 1$.

Iterationen avslutas med att $\alpha_q = \alpha_3 = 4$ och $\gamma_p = \gamma_1 = 3$ byter plats.

Andra iterationen:

Nu är $\alpha = (1, 2, 3)$ och $\gamma = (4, 5)$. Då är

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b}_\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Motsvarande baslösning \mathbf{x} erhålls ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}_\alpha$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Därefter beräknas vektorn \mathbf{u} ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\alpha^T \mathbf{u} = \mathbf{c}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ så är den aktuella baslösningen $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en optimal lösning.

Därmed är vi klara och kan avbryta här.

Uppgift 4.(a)

Att minimera $|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}|^2$ är ekvivalent med att lösa normalekvationerna $\mathbf{A}^\top \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$.

Vi utför därför radoperationer på matrisen $[\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \quad \mathbf{A}^\top \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

Multiplikation av första raden med faktorn $1/3$ ger $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

Addition av 3 gånger första raden till andra raden ger $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Mängden av lösningar till detta systemet ges av $x_1 = 2 + t$, $x_2 = t$, för $t \in \mathbb{R}$, dvs $\mathbf{x} = (2, 0)^\top + t \cdot (1, 1)^\top$. En lösning till normalekvationerna är alltså $\bar{\mathbf{x}} = (2, 0)^\top$.

Sätt $\mathbf{p} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = (2, -2, 2)^\top$. Då gäller ekvivalensen $\mathbf{A}^\top \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b} \iff \mathbf{Ax} = \mathbf{p}$.

Vi ska nu minimera $\frac{1}{2} |\mathbf{x}|^2$ då $\mathbf{Ax} = \mathbf{p}$.

Optimal lösning till detta problem ges av $\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{u}$, där $\mathbf{AA}^\top \mathbf{u} = \mathbf{p}$.

Vi utför därför radoperationer på matrisen $[\mathbf{AA}^\top \quad \mathbf{p}] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Multiplikation av första raden med faktorn $1/2$ ger $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Addition av 2 gånger första raden till andra raden, samt

addition av (-2) gånger första raden till tredje raden, ger $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

En (av flera) lösningar till detta system är $\hat{\mathbf{u}} = (1, 0, 0)^\top$.

Därmed är $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top \hat{\mathbf{u}} = (1, -1)^\top$ den sökta MN-lösningen till MK-problemet.

Uppgift 4.(b)

Den sökta vektorn \mathbf{v} är den vektor i $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ som ligger närmast den givna vektorn \mathbf{b} , dvs $\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = (2, -2, 2)^\top$. (Observera att $\mathbf{v} = \mathbf{p}$.)

Eftersom underrummen $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$ är varandras ortogonala komplement, så ges den sökta vektorn $\mathbf{w} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$ av att $\mathbf{w} = \mathbf{b} - \mathbf{v} = (2, 1, -1)^\top$.

(Som en kontroll kan man konstatera att $\mathbf{A}^\top \mathbf{w} = \mathbf{0}$.)

Uppgift 5.(a)

Vi ska här lösa följande optimeringsproblem i variabelvektorn $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (där $n = 4$):

$$\begin{aligned} & \text{maximera } |\mathbf{Ax}| \\ & \text{då } |\mathbf{x}| = 1. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Eftersom $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{x}$ och $|\mathbf{Ax}|^2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{Ax}$ så är $\hat{\mathbf{x}}$ en optimal lösning till problemet (0.1) om och endast om $\hat{\mathbf{x}}$ är en optimal lösning till problemet

$$\begin{aligned} & \text{maximera } \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{Ax} \\ & \text{då } \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = 1. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Om vi inför matrisen $\mathbf{H} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ så kan problemet (0.2) skrivas

$$\begin{aligned} & \text{maximera } \mathbf{x}^\top \mathbf{Hx} \\ & \text{då } \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = 1. \end{aligned} \tag{0.3}$$

Det är välkänt att om \mathbf{H} har spektralfaktoriserats på formen $\mathbf{H} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\top$ så ges en optimal lösning till problemet (0.3) av $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{q}_1$, där \mathbf{q}_1 är första kolonnen i matrisen \mathbf{Q} . Det förutsätts här att egenvärdena till \mathbf{H} är sorterade i fallande storleksordning, så att \mathbf{q}_1 är en normerad egenvektor svarande mot det *största* egenvärdet till \mathbf{H} .

Antag nu att \mathbf{A} har singularvärdesfaktoriserats på formen $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^\top$.

Då är $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{S}^\top \mathbf{U}^\top \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^\top = \mathbf{V}\mathbf{S}^\top \mathbf{S}\mathbf{V}^\top$, där \mathbf{V} är en ortogonal $n \times n$ -matris medan $\mathbf{S}^\top \mathbf{S}$ är en $n \times n$ diagonalmatris med diagonalelementen $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2, \dots, 0$.

Det betyder att $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ här är spektralfaktoriserad med $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}^\top \mathbf{S}$ och $\mathbf{Q} = \mathbf{V}$.

Enligt ovan ges då en optimal lösning till problemet (0.2) av $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_1 =$ första kolonnen i matrisen \mathbf{V} , förutsatt att singularvärdena till \mathbf{A} är sorterade i fallande storleksordning.

Vektorn \mathbf{v}_1 är alltså en egenvektor till $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ svarande mot det största egenvärdet $\sigma_1^2 = 25$. Därmed erhålls \mathbf{v}_1 som en normerad lösning till ekvationssystemet $(\mathbf{A}^\top \mathbf{A} - 25 \cdot \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, som kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} -18 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & -18 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & -18 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & -18 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \mathbf{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

där k är en godtycklig konstant. Genom att välja k så att \mathbf{x} får längden 1 så erhålls den normerade egenvektorn $\mathbf{v}_1 = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)^\top$, som alltså är en optimal lösning till problemet (0.1).

Uppgift 5.(b)

Den matris av rangen 1 som bäst approximerar \mathbf{A} ges av $\mathbf{X} = \mathbf{u}_1 \sigma_1 \mathbf{v}_1^\top$.

Vi har att $\sigma_1 = 5$, $\mathbf{v}_1 = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)^\top$ och $\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}\mathbf{v}_1 \sigma_1^{-1} = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)^\top$.

$$\text{Vår sökta matris blir därför } \mathbf{X} = \mathbf{u}_1 \sigma_1 \mathbf{v}_1^\top = \begin{bmatrix} 1.25 & 1.25 & 1.25 & 1.25 \\ 1.25 & 1.25 & 1.25 & 1.25 \\ 1.25 & 1.25 & 1.25 & 1.25 \\ 1.25 & 1.25 & 1.25 & 1.25 \end{bmatrix}.$$