KTH Matematik

Tentamen i 5B1760 Linjär och kvadratisk optimering.
Torsdag 31 mars 2005 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. Ett formelblad delas ut vid tentamen.

Bonus: Den som har minst 4 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a).
Den som har minst 8 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över 1(a) och 1(b).
Den som har minst 10 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 24 poäng.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Utför en QR–faktorisering av matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. ....(4p)

(b) Lös följande LP-problem grafiskt i en stor och noggrann figur, med utritat tillåtet område och några lämpligt valda nivåkurvor till målfunktionen. Ange den optimala lösningen samt problemets optimalvärde. ....(4p)

$$\begin{array}{rrcrcl} \text{minimera} & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 4 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(c) Bestäm en optimal lösning till följande problem i variablerna x_1 och x_2. Ange även problemets optimalvärde. ....(2p)

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & 3x_1^2 - 2x_2^2 \\ \text{då} & x_1^2 + x_2^2 = 1. \end{array}$$

2. Lös följande LP-problem med Simplexmetoden.
Starta från den givna hörnlösningen $\mathbf{x} = (0, 0, 0)^{\mathsf{T}}$.

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{maximera} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{då} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 6 \\ & x_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & & & \geq & 0 \\ & & & & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Förklara noggrant varje steg i algoritmen. .... (10p)

3. I denna uppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}$.

Bestäm en bas till vart och ett av de fyra fundamentala underrummen till $\mathbf{A}$, dvs till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$. .... (10p)

4. Låt H beteckna följande så kallade *hyperplan* i $\mathbb{R}^4$:

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1\}.$$

Bestäm den punkt $\hat{\mathbf{x}} \in H$ som ligger närmast punkten $\mathbf{q} = (1,\, 1,\, 1,\, 1)^\mathsf{T}$.
(Dvs den vektor $\hat{\mathbf{x}} \in H$ som minimerar $|\mathbf{x} - \mathbf{q}|^2$ bland alla $\mathbf{x} \in H$.) .... (10p)

5. I denna uppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, där b_1 och b_2 är givna tal.

Den euklidiska normen av en vektor $\mathbf{x}$ betecknas som vanligt $|\,\mathbf{x}\,|$, så att $|\,\mathbf{x}\,|^2 = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ och $|\,\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\,|^2 = (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$.

(a) Bestäm *samtliga* optimala lösningar $\mathbf{x}$ till följande problem:

$$\text{P1:} \quad \text{minimera} \quad |\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\,|^2 \quad \text{då} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Svaret får förstås innehålla b_1 och b_2. .... (2p)

(b) Låt $X(\mathbf{b})$ = mängden av optimala lösningar $\mathbf{x}$ till problemet P1 ovan.
Bestäm den unika optimala lösningen till följande problem:

$$\text{P2:} \quad \text{minimera} \quad |\,\mathbf{x}\,|^2 \quad \text{då} \quad \mathbf{x} \in X(\mathbf{b}).$$

Svaret får förstås innehålla b_1 och b_2. .... (2p)

(c) Låt $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{b})$ beteckna den optimala lösningen till problemet P2 ovan.
Visa att $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{b}) = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ för en viss matris $\mathbf{A}^+$. Ange $\mathbf{A}^+$. .... (1p)

(d) Låt nu ε vara ett givet tal som uppfyller $\varepsilon > 0$.
Bestäm den unika optimala lösningen till följande problem:

$$\text{P3:} \quad \text{minimera} \quad |\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\,|^2 + \varepsilon\,|\,\mathbf{x}\,|^2 \quad \text{då} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Svaret får förstås innehålla b_1, b_2 och ε. .... (3p)

(e) Låt $\tilde{\mathbf{x}}_\varepsilon(\mathbf{b})$ beteckna den optimala lösningen till problemet P3 ovan.
Visa att $\tilde{\mathbf{x}}_\varepsilon(\mathbf{b}) = \tilde{\mathbf{A}}_\varepsilon\mathbf{b}$ för en viss matris $\tilde{\mathbf{A}}_\varepsilon$ som beror av ε. Visa också att om ε går mot 0 så går varje enskilt element i matrisen $\tilde{\mathbf{A}}_\varepsilon$ mot motsvarande element i matrisen $\mathbf{A}^+$. .... (2p)

Lycka till!