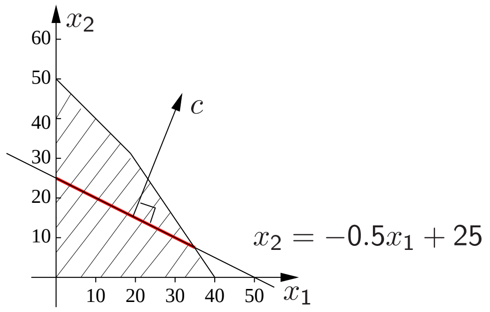
Föreläsning 2: Simplexmetoden

1. Repetition av geometriska simplexmetoden.
2. Linjärprogrammeringsproblem på standardform.
3. Simplexalgoritmen.
4. Hur bestämmer man tillåtna startbaslösningar ?

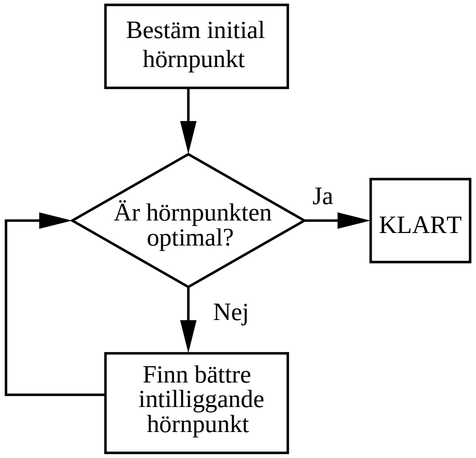
Repetition av den geometriska Simplexmetoden

Produktplaneringsproblemet

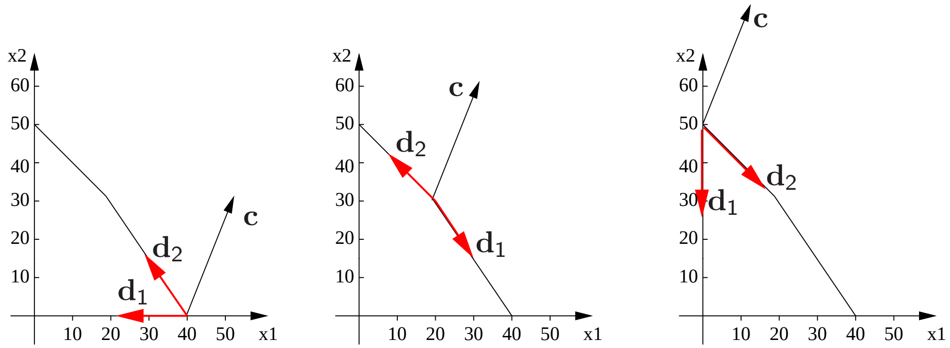
$$\begin{aligned} \text{maximera} \quad & 200x_1 + 400x_2 \\ \text{då} \quad & \tfrac{1}{40}x_1 + \tfrac{1}{60}x_2 \le 1 \\ & \tfrac{1}{50}x_1 + \tfrac{1}{50}x_2 \le 1 \\ & x_k \ge 0, \ k = 1, 2 \end{aligned}$$



Idén bakom Simplexmetoden är att söka iterativt utefter kanter till hörn med allt bättre målfunktionsvärde.



Sökning med den geometriska simplexmetoden



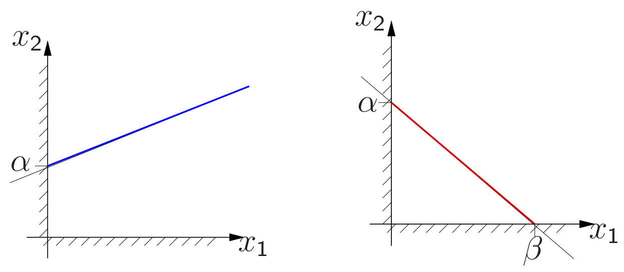
$\mathbf{c}^T\mathbf{d}_1 < 0$	$\mathbf{c}^T\mathbf{d}_1 < 0$	$\mathbf{c}^T\mathbf{d}_1 < 0$
$\mathbf{c}^T\mathbf{d}_2 > 0$	$\mathbf{c}^T\mathbf{d}_2 > 0$	$\mathbf{c}^T\mathbf{d}_2 < 0$
välj riktning d_2	välj riktning d_2	optimal HP

Standardformen för produktplaneringsexemplet.

$$\begin{array}{rlcrl} \text{maximera} & 200x_1 + 400x_2 & = -\text{minimera} & & -200x_1 - 400x_2 \\ \text{då} & \frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \leq 1 & & \text{då} & \frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 + x_3 = 1 \\ & \frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \leq 1 & & & \frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 + x_4 = 1 \\ & x_k \geq 0,\ \ k = 1,2 & & & x_k \geq 0,\ \ k = 1,2,3,4. \end{array}$$

Hur är hörnpunkter representerade i standardformen ?

Geometrisk tolkning för LP på standardform: 2D

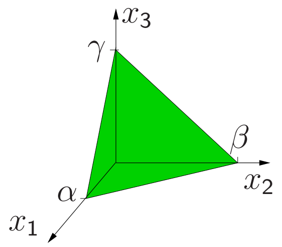


Bivillkor: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$.

$\mathcal{F}$ är ett halv-oändligt (blått) eller ändligt linjesegment (rött)

Det optimala $\hat{\mathbf{x}} = (0, \alpha)$, $(\beta, 0)$, eller så har problemet ingen ändlig lösning.

Geometrisk tolkning för LP på standardform: 3D



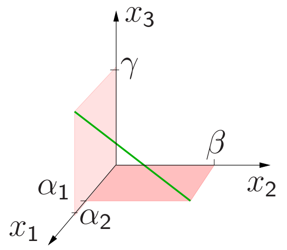
Bivillkor: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$.

$\mathcal{F}$ är skärningen av ett plan och den första kvadranten. (grönt)

Det finns tre hörnpunkter

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\alpha, 0, 0), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (0, \beta, 0), \quad \mathbf{x}^{(3)} = (0, 0, \gamma),$$

Geometrisk tolkning för LP på standardform: 3D



Bivillkor: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$.
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$.

$\mathcal{F}$ är skärningen av en linje och den första kvadranten (grön)

Det finns två hörnpunkter

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\alpha_1, \beta, 0), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (\alpha_2, 0, \gamma),$$

Notera: # nollskilda element i $\mathbf{x}^{(k)}$ = # bivillkor, i dessa exempel.

Produktionsplaneringsexemplet

Bivillkoret i standardform är $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{40} & \frac{1}{60} & 1 & 0\\ \frac{1}{50} & \frac{1}{50} & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

Detta kan skrivas som

$$\sum_{k=0}^{4} \mathbf{a}_k x_k = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 + \mathbf{a}_4 x_4 = b$$

Om vi sätter t.ex. $x_2 = x_3 = 0$ så har vi att $\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_4 x_4 = \mathbf{A}_\beta \mathbf{x}_\beta = \mathbf{b}$, där

$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{40} & 0\\ \frac{1}{50} & 1\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_\beta = \begin{bmatrix}x_1\\ x_4\end{bmatrix}$$

Vi beräknar därefter

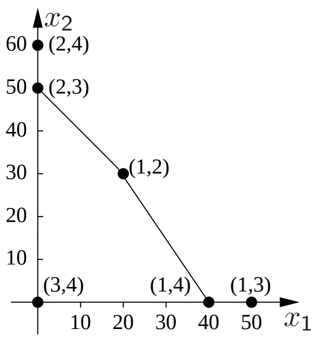
$$\mathbf{x}_\beta = \begin{bmatrix}x_1\\ x_4\end{bmatrix} = \mathbf{A}_\beta^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}40\\ \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

Dessa värden på x_1 och x_4, tillsammans med $x_2 = x_3 = 0$, ger en tillåten lösning, *d.v.s.*, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där $(x_1, x_2) = (40, 0)$.

Detta är en hörnpunkt.

Övriga lösningar motsvarande kombinationer av två kolumner i $\mathbf{A}$ finns representerade i tabellen på nästa sida.

Geometrisk illustration av baslösningarna



β	$\mathbf{A}_\beta$	$\mathbf{x}_\beta$	(x_1, x_2)
$(3,4)$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$
$(2,4)$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{60} & 0\\ \frac{1}{50} & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}60\\ -\frac{1}{5}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\ 60\end{bmatrix}$
$(1,4)$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{40} & 0\\ \frac{1}{50} & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}40\\ \frac{1}{5}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}40\\ 0\end{bmatrix}$
$(2,3)$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{60} & 1\\ \frac{1}{50} & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}50\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\ 50\end{bmatrix}$
$(1,3)$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{40} & 1\\ \frac{1}{50} & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}50\\ -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}50\\ 0\end{bmatrix}$
$(1,2)$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{40} & \frac{1}{60}\\ \frac{1}{50} & \frac{1}{60}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}20\\ 30\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}20\\ 30\end{bmatrix}$

Det gäller allmänt att hörnpunkter svarar mot så kallade baslösningar.

LP-problem på standardform

$$\begin{aligned} &\text{minimera} && \sum_{j=1}^{n} c_j x_j && = \text{minimera} \quad \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}\\ &\text{då} && \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\; i = 1, \ldots, m && \quad\text{då} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\\ & && x_j \geq 0,\; j = 1, \ldots, n && \quad\quad\;\; \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

där

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \ldots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

och där koefficienterna $b_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, m$.

Simplexalgoritmen

För given basindexvektor och icke-basindexvektor

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$$
$$\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_l), \quad l = n - m$$

definierar vi

$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\beta_1} & \ldots & \mathbf{a}_{\beta_m} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\delta_1} & \ldots & \mathbf{a}_{\delta_l} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_\beta = \begin{bmatrix} c_{\beta_1} \\ \vdots \\ c_{\beta_m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_\beta = \begin{bmatrix} x_{\beta_1} \\ \vdots \\ x_{\beta_m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_\delta = \begin{bmatrix} c_{\delta_1} \\ \vdots \\ c_{\delta_l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_\delta = \begin{bmatrix} x_{\delta_1} \\ \vdots \\ x_{\delta_l} \end{bmatrix}$$

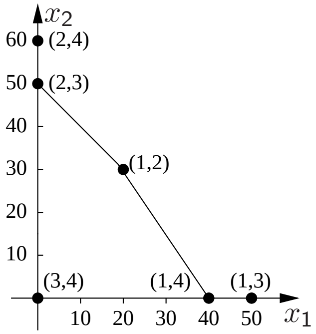
Definition 1. *Baslösningen svarande mot β ges av*

$$\mathbf{A}_\beta \mathbf{x}_\beta = \mathbf{b} \;\Rightarrow \mathbf{x}_\beta = \mathbf{A}_\beta^{-1}\mathbf{b}$$

baslösningen är tillåten (TBL) om $\mathbf{x}_\beta \geq 0$

- *En tillåten baslösning kallas icke-degenererad om $\mathbf{x}_\beta > 0$*
- *En tillåten baslösning kallas degenererad om $\mathbf{x}_{\beta_k} = 0$ för något index β_k.*

Produktplaneringsexemplet

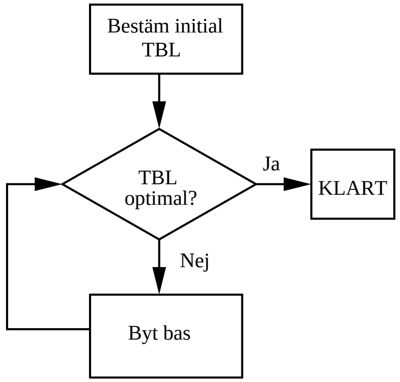


β	$\mathbf{A}_\beta$	$\mathbf{x}_\beta$	δ	$\mathbf{x}_\delta$
$(3,4)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$(1,2)$	$\mathbf{0}$
$(2,4)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{60} & 0 \\ \frac{1}{50} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 60 \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$	$(1,3)$	$\mathbf{0}$
$(1,4)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{40} & 0 \\ \frac{1}{50} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 40 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$	$(2,3)$	$\mathbf{0}$
$(2,3)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{60} & 1 \\ \frac{1}{50} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 50 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$	$(1,4)$	$\mathbf{0}$
$(1,3)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{40} & 1 \\ \frac{1}{50} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 50 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$(2,4)$	$\mathbf{0}$
$(1,2)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{40} & \frac{1}{60} \\ \frac{1}{50} & \frac{1}{60} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$	$(3,4)$	$\mathbf{0}$

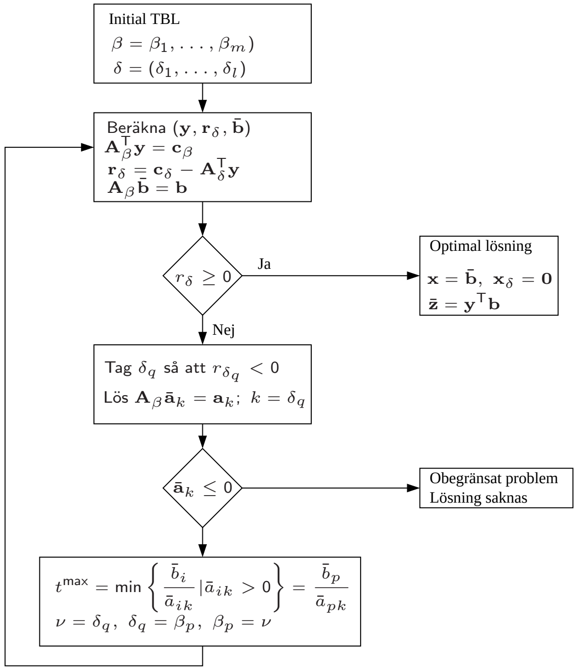
Villka baslösningar är tillåtna? Jämför med den geometriska tolkningen.

Sats 1. *Om det finns en optimal lösning så finns det en optimal tillåten baslösning.*

Satsen motiverar följande simplexalgoritm



De olika blocken kan implementeras med linjär algebraoperationer.



Simplex för produktionsplaneringsexemplet

Standardformen för produktplaneringsexemplet.

$$\begin{bmatrix} \text{minimera} & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{då} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{bmatrix} \quad \text{där} \quad \begin{array}{l} \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} -200 & -400 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{40} & \frac{1}{60} & 1 & 0 \\ \frac{1}{50} & \frac{1}{50} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Vi vill lösa detta med simplex.

När man har infört slackvariabler kan man visa att om man väljer dessa som startbasvariabler så bildar det en TBL. (Givet att $\mathbf{b} \geq 0$)

Simplex

Låt $\beta = \{3, 4\}$ och $\delta = \{1, 2\}$,

$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 1/40 & 1/60 \\ 1/50 & 1/50 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_\beta^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_\delta^T = \begin{bmatrix} -200 & -400 \end{bmatrix}$$

Då blir baslösningen $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_\beta^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tillåten.

Simplexmultiplikatorerna ges av ekvationen $\mathbf{A}_\beta^T y = \mathbf{c}_\beta$ och reducerade kostnader ges av $\mathbf{r}_\delta^T = \mathbf{c}_\delta^T - y^T \mathbf{A}_\delta$, d.v.s.

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{och } \mathbf{r}_\delta^T = \begin{bmatrix} -200 & -400 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/40 & 1/60 \\ 1/50 & 1/50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 & -400 \end{bmatrix}.$$

Simplex

Eftersom de reducerade kostnaderna är negativa så är den aktuella TBL inte optimal. $\mathbf{r}_{\delta_2}$ är minst, så låt $\mathbf{x}_{\delta_2} = \mathbf{x}_2$ bli ny basvariabel.

Vilken variabel ska ut ur basen ?

$\bar{\mathbf{b}}$ bestäms från $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$, d.v.s. $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_\beta^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\bar{\mathbf{a}}_2$ bestäms från $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{a}_2$, d.v.s. $\bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{A}_\beta^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1/60 \\ 1/50 \end{bmatrix}$

Nu ska x_2 väljas så stor som möjligt då $\mathbf{x}_\beta$ är icke-negativ:

$$\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}_2 x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/60 \\ 1/50 \end{bmatrix} x_2 \geq 0$$

Det största möjliga värdet på x_2 är 50, varvid $x_{\beta_2} = x_4 = 0$.
Alltså ska x_4 ersättas av x_2 i nästa baslösning.

Simplex: Iteration 2

Låt $\beta = \{3,2\}$ och $\delta = \{1,4\}$,

$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1/60 \\ 0 & 1/50 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 1/40 & 0 \\ 1/50 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_\beta^T = \begin{bmatrix} 0 & -400 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_\delta^T = \begin{bmatrix} -200 & 0 \end{bmatrix}$$

Då blir baslösningen $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_\beta^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -5/6 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 50 \end{bmatrix}$ tillåten.

Simplexmultiplikatorerna ges av ekvationen $\mathbf{A}_\beta^T y = \mathbf{c}_\beta$

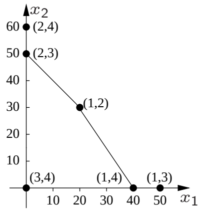
$$y = \mathbf{A}_\beta^{-T}\mathbf{c}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -5/6 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -20000 \end{bmatrix}.$$

Simplex: Iteration 2

Reducerade kostnader ges av $\mathbf{r}_\delta^T = \mathbf{c}_\delta^T - y^T\mathbf{A}_\delta$, d.v.s.

$$\mathbf{r}_\delta^T = \begin{bmatrix} -200 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -20000 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/40 & 0 \\ 1/50 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 20000 \end{bmatrix}.$$

Eftersom de reducerade kostnaderna är positiva så är den aktuella TBL optimal.



Vi startade i origo med basvariabler (3,4) och bytte sedan till basvariablerna (3,2), dvs punkten (0,50), vilken vi geometriskt motiverade är optimal.

Initial tillåten baslösning

Ibland kan det vara icke-trivialt att hitta en initial TBL. Då kan man lösa problemet i två faser. Här antar vi att $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

Fas 1 Lös LP-problemet

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{e}^\mathsf{T}\mathbf{v} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{v} \geq 0 \end{aligned}$$

där $\mathbf{I}$ är enhetsmatrisen och $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$. Låt initial TBL svara mot variablerna i $\mathbf{v}$. Om optimallösningen är $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ så har man hittat en initial TBL till fas 2.

Fas 2 Lös ursprungliga problemet på standardform med basvariabler från Fas 1.

Läsanvisningar

- Linjär Optimering, Gröna häftet, sidan 13-22.
- Linjär Algebra för optimerare, Gula häfte, sidan 19-23.