Föreläsning 4: Linjär algebra II.

1. Beräkning av de fundamentala underrummen.
2. Gauss-Jordans metod för lösning av ekvationssystem.

Anmälan till tentan är skall göras på mina sidor under perioden 12 september - 1 oktober kl.

Beräkning av de fyra fundamentala underrummen

Två metoder för beräkning av de fundamentala underrummen

- Singulärvärdesfaktorisering. Bäst för numerisk beräkning.
- Gauss-Jordans metod. Vi fokuserar på denna.

Sammanfattning av Gauss-Jordans metod

Steg 1 Utför elementära radoperationer för att transformera $\mathbf{A}$ till trappstegsform

$$\mathbf{PA} = \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

där $\mathbf{P}$ är en produkt av elementära radoperationsmatriser medan $\mathbf{U}$ är en trappstegsmatris på formen

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * & 0 & * & * & 0 & * & * & * \\ & & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & * & * \\ & & & & 1 & * & * & 0 & * & * & * \\ & 0 & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & 1 & * & * & * \end{bmatrix}$$
$$\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_r$$

Steg 1 (fortsättning) Trappstegskolonnerna är indicerade $\beta_1, \ldots, \beta_r$, där $r = \text{rang}(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{R}(\mathbf{A})$ (rangen för matrisen).
Övriga kolonner indiceras $\delta_1, \ldots, \delta_l$, $l = n - r$.

Steg 2 Definiera

$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} \hat{a}_{\beta_1} & \ldots & \hat{a}_{\beta_r} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{U}_\beta = \begin{bmatrix} u_{\beta_1} & \ldots & u_{\beta_r} \end{bmatrix} = \mathbf{I}_r$$
$$\mathbf{U}_\delta = \begin{bmatrix} u_{\delta_1} & \ldots & u_{\delta_l} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{S} = \mathbf{P}^{-1}$$

Notera att $\mathbf{U}_\beta$ (trappstegskolonnerna i $\mathbf{U}$) är en identitetsmatris.

Steg 2 (fortsättning) Då $\mathbf{S} = \mathbf{P}^{-1}$ kan (1) ekvivalent skrivas

$$\mathbf{A} = \mathbf{ST} = \begin{bmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{O}\end{bmatrix} = \mathbf{S}_1\mathbf{U}$$

Om vi betraktar kolonnerna med index $\beta_1, \dots, \beta_r$ får vi

$$\mathbf{A}_\beta = \mathbf{S}_1\mathbf{U}_\beta = \mathbf{S}_1$$

vilket ger $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\beta\mathbf{U}$.

Steg 3 Faktoriseringen $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\beta\mathbf{U}$ är av formen $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ där

$$\text{m rader}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} & \mathbf{A} & \end{bmatrix}}_{\text{n kolonner}}\right. = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{B}\end{bmatrix}}_{\text{r linjärt oberoende kolonner}}\left.\begin{bmatrix} & \mathbf{C} & \end{bmatrix}\right\}\text{r linjärt oberoende rader}$$

Enligt sats i sektion 6.1 i Svanbergs gula häfte gäller

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\mathbf{A}) &= \mathcal{R}(\mathbf{A}_\beta\mathbf{U}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}_\beta) = \text{span}\{\hat{a}_{\beta_1}, \dots, \hat{a}_{\beta_r}\}\\
\mathcal{N}(\mathbf{A}) &= \mathcal{N}(\mathbf{A}_\beta\mathbf{U}) = \mathcal{N}(\mathbf{U}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{Ux} = \mathbf{0}\}\\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{U}_\beta\mathbf{x}_\beta + \mathbf{U}_\delta\mathbf{x}_\delta = \mathbf{0}\}\\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{x}_\beta = -\mathbf{U}_\delta\mathbf{x}_\delta;\ \mathbf{x}_\delta \in \mathbf{R}^l\}
\end{aligned}$$

Steg 3 (fortsättning) Vidare har vi med hjälp av ovanstående faktoriseringsresultat

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathcal{R}(\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\beta^T) = \mathcal{R}(\mathbf{U}^T)$$

Slutligen

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m : \mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{0}\}$$

vilket motsvarar ett ekvationssystem som skall lösas.

Lösning av linjära ekvationssystem

Existens och unikhet av lösning till det linjära ekvationssystemet

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

kan bestämmas med

1. linjär algebrans huvudsats
   - Ger teoretisk insikt samt lösningsformler (se ovan).
2. Gauss-Jordans metod
   - Praktisk metod för handräkning.

Gauss-Jordans metod för lösning av ekvationssystem

Transformera ekvationssystemet med hjälp av elementära radoperationer

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{b} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_r \\ \bar{\mathbf{b}}_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

där

$$
\mathbf{U} = \begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & * & 0 & * & 0 & * & * & 0 & * & * & * \\
 & & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & * & * \\
 & & & & 1 & * & * & 0 & * & * & * \\
 & & 0 & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & 1 & * & * & *
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccccccccccc} \beta_1 & & \beta_2 & & \beta_3 & & & \beta_r & & & \end{array}
\end{array}
$$

Observera att

1. Lösning saknas om, och endast om, $\bar{\mathbf{b}}_n \neq 0$
2. Om $\bar{\mathbf{b}}_n = 0$, så finns lösningar, och de kan alla skrivas på formen $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_n$ där $\mathbf{x}_n \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ och

$$
\mathbf{x}_r = \begin{cases} \mathbf{x}_{\beta_l}, & \text{för koefficienter motsvarande trappstegskolumnerna} \\ 0, & \text{annars} \end{cases}
$$

där

$$
\mathbf{x}_\beta = \begin{bmatrix} x_{\beta_1} \\ \vdots \\ x_{\beta_k} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{b}}_r
$$

Läsanvisningar

- Linjär Algebra för optimerare, Gula häftet, sidorna 30-35.