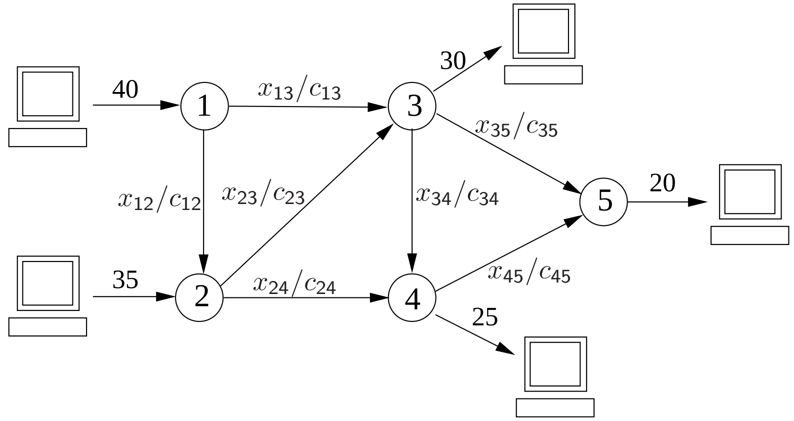
Föreläsning 5: Nätverksoptimering

1. Minkostnadsflödesproblem i nätverk.
2. Modellering och grafteori.
3. Simplexmetoden.

Minkostnadsflödesproblem i nätverk



Data skall skickas från servrar i nod 1 och 2 till terminaler i nod 3, 4, 5.

Kostnaden för trafik i länken mellan nod i och j är c_{ij} Kr/Kbyte.

Vi vill minimera kostnaden för den totala datatrafiken.

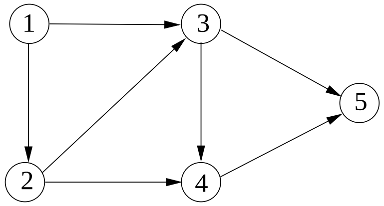
Resulterande optimeringsproblem

$$
\begin{aligned}
\text{minimera} \quad & \sum_{\text{alla bågar}} c_{ij}x_{ij} \\
\text{då} \quad & x_{12} + x_{13} = 40 \\
& -x_{12} + x_{23} + x_{24} = 35 \\
& -x_{13} - x_{23} + x_{34} + x_{35} = -30 \\
& -x_{24} - x_{34} + x_{45} = -25 \\
& -x_{35} - x_{45} = -20 \\
& x_{ij} \geq 0, \ \text{för alla bågar i grafen}
\end{aligned}
$$

Vi kommer att behandla följande frågor

- Modellering av nätverksflödesproblem
  - Grafer, träd, cykler (slingor), uppspännande träd.
- Hur kan man utnyttja grafens speciella struktur i simplexmetoden.

Modellering och grafteori



En riktad graf $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{B})$ består av en mängd *noder* $\mathcal{N} = \{1, \ldots, m\}$ och en mängd *bågar* $\mathcal{B}$

- Bågen från nod i till nod j betecknas (i, j).
- Vi skiljer på bågen (i, j) och bågen (j, i).

I grafen ovan är

$$\mathcal{N} = \{1, \ldots, 5\}$$
$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4), (3,5), (4,5)\}$$

Om vi ordnar bågarna i $\mathcal{B}$ i någon ordning, t.e.x.

$$\mathcal{B} = \{\underset{\rho_1}{(1,2)}, \underset{\rho_2}{(1,3)}, \underset{\rho_3}{(2,3)}, \underset{\rho_4}{(2,4)}, \underset{\rho_5}{(3,4)}, \underset{\rho_6}{(3,5)}, \underset{\rho_7}{(4,5)}\} \tag{1}$$

då definieras grafens anslutningsmatris (incidensmatris) $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ som

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{båge } \rho_j \text{ startar i nod } i \\ -1, & \text{båge } \rho_j \text{ slutar i nod } i \\ 0, & \text{annars} \end{cases} \tag{2}$$

Man ser enkelt att $\mathbf{e}^\mathsf{T} \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$, där $\mathbf{e}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$. Raderna är därmed linjärt beroende och man kan stryka sista raden och få den reducerade anslutningsmatrisen $\mathbf{A}$.

För vårt exempel får vi

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vägar och cykler

- En *väg* från nod s till nod t i en riktad graf är en sammanhängande sekvens av bågar $\rho_1, \ldots, \rho_N$ där

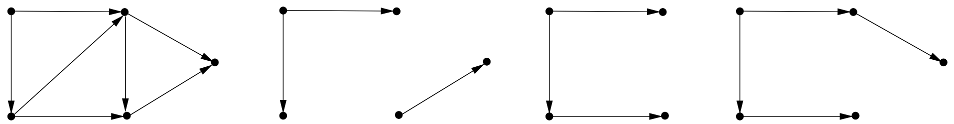
$$\rho_k = (i_{k-1}, i_k), \text{ eller } \rho_k = (i_k, i_{k-1}), \text{ och } i_0 = s, \ i_N = t$$

- En *riktad väg* från nod s till nod t i en riktad graf är en sammanhängande sekvens av bågar $\rho_1, \ldots, \rho_N$ där

$$\rho_k = (i_{k-1}, i_k), \text{ och } i_0 = s, \ i_N = t$$

- En *(riktad) cykel* är en *(riktad) väg* från en nod till sig själv.

- En graf kallas *sammanhängande* om det existerar en väg mellan varje par av noder.
- En graf kallas *acyklisk* om den saknar cykler.
- Ett *träd* utgörs av en sammanhängande delmängd av bågarna i en graf som saknar cykler.
- I en graf med n noder utgör ett träd med $n-1$ bågar ett *uppspännande träd*.



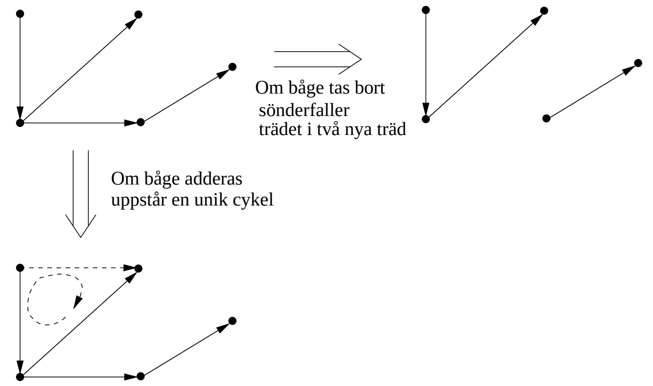
Sammanhängande graf
Ej acyklisk

Acyklisk graf
Ej sammanhängande

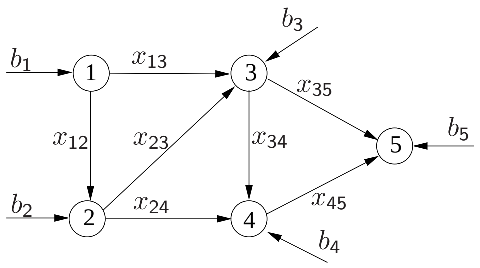
Träd

Uppspännande träd

- Om en båge adderas till ett uppspännande träd uppstår en unik cykel.
- Om en båge tas bort från ett uppspännande träd då sönderfaller trädet i två nya träd.



Flödesbalans



- x_{ij} betecknar flödet (datatrafik, olja, e.t.c.) i båge (i, j)
  - Om flödet x_{ij} går i riktningen $i \to j$ så är $x_{ij} \geq 0$. Annars $x_{ij} \leq 0$.
- b_i betecknar externt in/ut flöde till nod i. Inflöde om $b_i \geq 0$ och utflöde om $b_i \leq 0$.

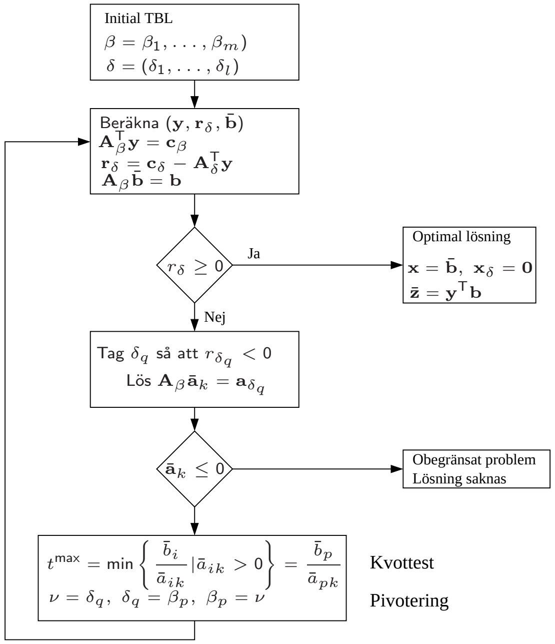
Flödesbalans i nod i (utflödet $=$ inflödet):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} = b_i, \;\; i = 1, \ldots, n \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$$

I ovanstående balansekvation är $\tilde{\mathbf{A}}$ grafens anslutningsmatris definierad i ekvation (2) och $\mathbf{x}$ är en kolonnvektor med bågflödena x_{ij} sorterade i samma ordning som bågarna i ekvation (1). Slutligen är $\tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_1 & \ldots & b_n \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$.

För att balansekvationen ska kunna lösas krävs det att $\mathbf{e}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{n} b_i = 0$. Under detta antagandet kan vi reducera flödesbalansekvationen genom att stryka sista raden i $\tilde{\mathbf{A}}$ och $\tilde{\mathbf{b}}$, d.v.s. balansekvation nr. n är redundant.
Vi får då ekvationssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & \ldots & b_{n-1} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$.

Simplexalgoritmen (påminnelse)



För nätverksproblem förenklas simplexalgoritmen enligt följande

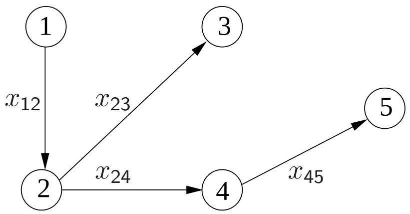
1. Bågarna svarande mot en basindexvektor svarar mot ett uppspännande träd
2. Basvariablerna som ges av $\mathbf{A}_\beta\mathbf{x}_\beta = \mathbf{b}$ kan enkelt bestämmas med hjälp av flödesbalanser i det uppspännande trädet.
3. Simplexmultiplikatorerna som ges av $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$ bestäms enkelt med hjälp av det uppspännande trädet.
4. Kvottestet sker genom att studera flödet i en cykel (slinga).
5. Pivoteringen (byte av bas) sker genom att byta ut en båge i det uppspännande trädet.

Vi illustrerar med det inledande exemplet.

Basmatriser svarar mot uppspännande träd

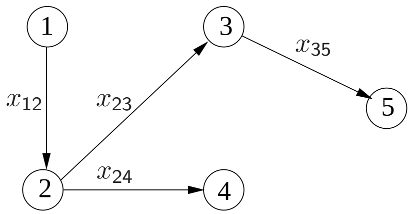
Sats 1. $m-1$ *kolonner ur* $(m-1)\times n$ *matrisen* $\mathbf{A}$ *i ett MKF-problem är linjärt oberoende om och endast om motsvarande* $m-1$ *bågar bildar ett uppspännande träd.*

Figuren visar två baser och motsvarande uppspännande träd i grafen.



$\mathcal{B}_\beta = \{(1,2),(2,3),(2,4),(4,5)\}$

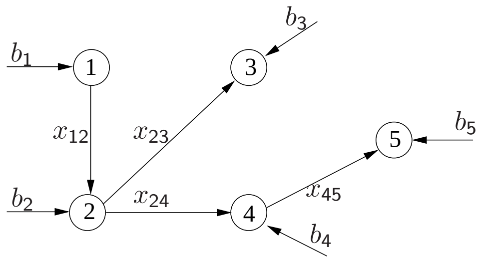
$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



$\mathcal{B}_\beta = \{(1,2),(2,3),(2,4),(3,5)\}$

$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Beräkning av baslösning $\mathbf{A}_\beta\mathbf{x} = \mathbf{b}$



Basvariablerna kan bestämmas genom flödesbalanser i det uppspännande trädet, där de externa flödena ges av $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (40, 35, -30, -25)$.

$$\begin{aligned} x_{12} &= b_1 = 40 \\ x_{23} &= -b_3 = 30 \\ x_{24} &= b_2 + x_{12} - x_{23} = 45 \\ x_{45} &= x_{24} + b_4 = 20 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Vi kan även beräkna basflödet genom flödesbalanser "nedströms"

$$x_{45} = b_5 = 20$$
$$x_{24} = x_{45} - b_4 = 45$$
$$x_{23} = -b_3 = 30$$
$$x_{12} = x_{23} + x_{24} - b_2 = b_1 = 40$$

Förstår du varför?

Vi noterar att $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{12} \\ \bar{b}_{23} \\ \bar{b}_{24} \\ \bar{b}_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 45 \\ 20 \end{bmatrix} \geq 0$ så vi har en tillåten baslösning.

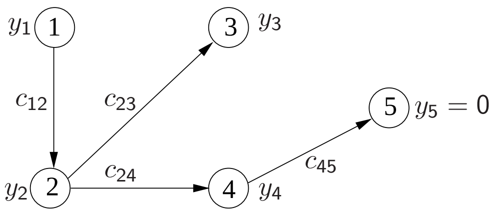
Beräkning av simplexmultiplikatorerna $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\beta = \mathbf{c}_\beta^\mathsf{T}$

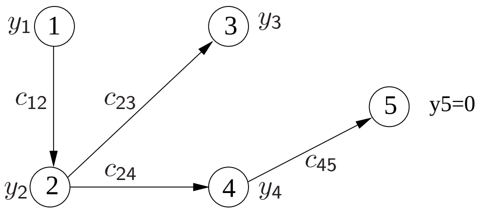
Simplexmultiplikatorena bestäms av ekvationen $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\beta = \mathbf{c}_\beta^\mathsf{T}$.

Till nod $1, \ldots, m-1$ svarar simplexmultiplikator y_k, $k = 1, \ldots, m-1$. Om vi sätter vi $y_m = 0$ får vi att

$$y_i - y_j = c_{ij}, \text{ för alla } (i,j) \in \mathcal{B}_\beta \text{ (alla basbågar)}$$

Därmed ser vi att simplexmultiplikatorerna enkelt kan beräknas ur nätverket





Med $\mathbf{c}^\mathsf{T} = (c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{24}, c_{34}, c_{35}, c_{45}) = (2, 5, 2, 2, 1, 1, 2)$ får vi (i denna ordning p.g.a. $y_5 = 0$)

$$y_4 - y_5 = c_{45} \;\Rightarrow\; y_4 = c_{45} = 2$$
$$y_2 - y_4 = c_{24} \;\Rightarrow\; y_2 = y_4 + c_{24} = 2 + 2 = 4$$
$$y_2 - y_3 = c_{23} \;\Rightarrow\; y_3 = y_2 - c_{23} = 4 - 2 = 2$$
$$y_1 - y_2 = c_{12} \;\Rightarrow\; y_1 = y_2 + c_{12} = 4 + 2 = 6$$

Beräkning av de reducerade kostnaderna $\mathbf{r}_\delta = \mathbf{c}_\delta - \mathbf{A}_\delta^\mathsf{T}\mathbf{y}$

Formeln för de reducerade kostnaderna $\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta$ resulterar i ekvationerna $(y_m = 0)$

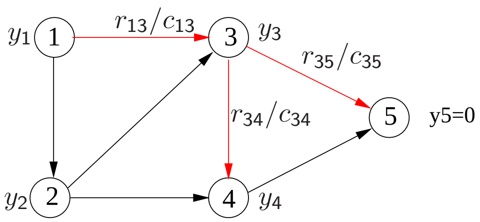
$$r_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j \text{ för alla } (i,j) \in \mathcal{B}_\delta \text{ (dvs för alla icke-basbågar)}$$

I vårt exempel har vi

$$\mathcal{B}_\delta = \{(1,3), (3,4), (4,5)\}$$

$$\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi kan göra beräkningarna med hjälp av nätverket

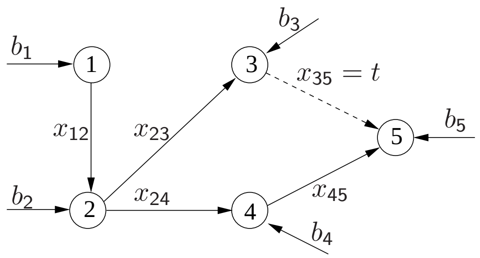


$$r_{13} = c_{13} - y_1 + y_3 = 5 - 6 + 2 = 1$$
$$r_{34} = c_{34} - y_3 + y_4 = 1 - 2 + 2 = 1$$
$$r_{35} = c_{35} - y_3 + y_5 = 1 - 2 + 0 = -1$$

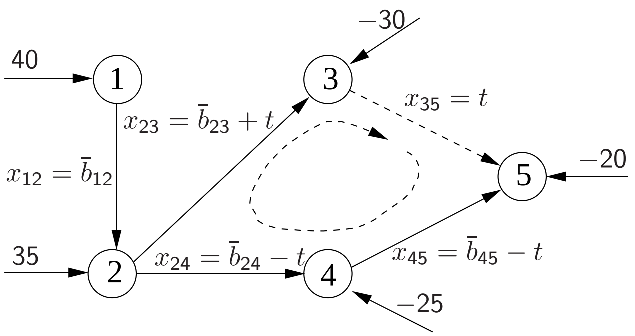
Vi noterar att $r_{35} < 0$ och den aktuella tillåtna baslösningen är ej optimal.

Kvottest

Eftersom $r_{35} < 0$ sätter vi $x_{35} = t$, dvs bågen $(3,5)$ skall in i basen. Frågan är nu vilken båge som skall tas bort för att vi åter skall få ett uppspännande träd som svarar mot en ny basmatris.



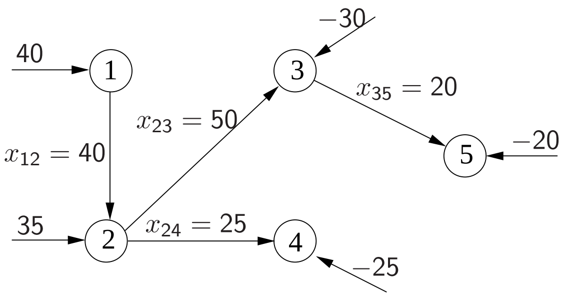
Den vanliga testen i simplexmetoden $t^{\max} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} | \bar{a}_{ik} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{pk}}$ förenklas genom att vi kan betrakta flödesbalans i slingan som bildats.



$$x_{23} = \bar{b}_{23} + t = 30 + t$$
$$x_{24} = \bar{b}_{24} - t = 45 - t$$
$$x_{45} = \bar{b}_{45} - t = 20 - t$$

Vi ser att t kan ökas till $t^{\max} = 20$ varvid $x_{45} = 0$. x_{45} utgår ur basen.

Pivotering (basbyte)



Vi har $\mathcal{B}_\beta = \{(1,2),(2,3),(2,4),(3,5)\}$ och

$$\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}_\beta = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 25 \\ 20 \end{bmatrix} \geq 0$$

vilket är en ny tillåten baslösning.

Nästa iteration

Om vi upprepar ovanstående steg får vi

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_\delta = \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{34} \\ r_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

Eftersom samtliga reducerade kostnader är positiva så är den aktuella tillåtna baslösningen optimal.

Sammanfattning av nätverkssimplexmetoden

För nätverksoptimering förenklas flera av stegen i simplexmetoden

(i) En basindexvektor $\mathcal{B}_\beta$ svarar mot bågarna i ett uppspännande träd.

(ii) Baslösningen svarande mot $\mathcal{B}_\beta$ kan beräknas ur flödesbalanser i ett uppspännande träd. Baslösningen är tillåten om flödet i samtliga basbågar är positivt.

(iii) Simplexmultiplikatorerna beräknas som $(y_m = 0)$

$$y_i - y_j = c_{ij}, \text{ för all } (i,j) \in \mathcal{B}_\beta \text{ (alla basbågar)}$$

(iv) De reducerade kostnaderna beräknas som $(y_m = 0)$

$$r_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j \text{ för alla } (i,j) \in \mathcal{B}_\delta \text{ (dvs för alla icke-basbågar)}$$

(v) Om alla $r_{ij} \geq 0$ så har vi funnit en optimal baslösning.

(vi) Om någon reducerad kostnad r_{ij} är negativ (tag den mest negativa) så adderar vi bågen (i,j) till det uppsännande trädet som svarar mot basen $\mathcal{B}_\beta$. En slinga bildas och vi lägger på ett flöde $x_{ij} = t \geq 0$. Genom att studera flödesbalanser i slingan ser man hur mycket t kan ökas innan något av basflödena blir noll. Om t kan ökas obegränsat så är lösningen till optimeringsproblemet obegränsad.

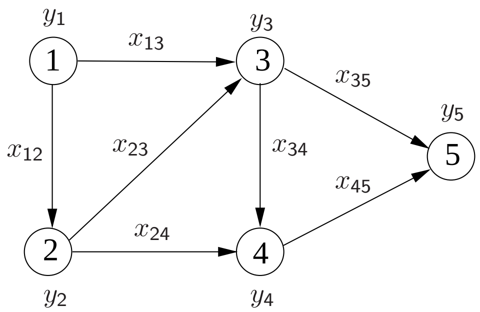
(vii) Uppdatera det uppspännande trädet genom att lägga till bågen (i,j) till $\mathcal{B}_\beta$ samtidigt som bågen svarande mot det flöde som blev noll tas bort. Vi har nu fått en ny bas (dvs ett nytt uppspännande träd) och en ny tillåten baslösning.

$(viii)$ Gå tillbaka till (iii).

De fyra fundamentala underrummen för anslutningsmatrisen

Detta avsnitt läses kursivt.

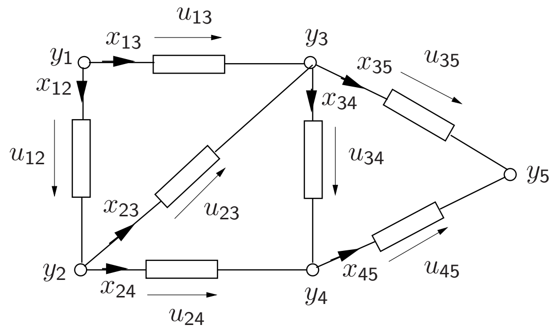
Vi diskuterar här de fyra fundamentala underrummen för anslutningsmatrisen $\tilde{\mathbf{A}}$ och tolkar dem med hjälp av den associerade grafen $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{B})$. Vi betraktar vårt exempel:



Till varje nod associerar vi en potential y_j, $j = 1, \ldots, m$.

Till varje båge associerar vi ett flöde (ström) x_{ij}.

Vi noterar att nätverket svarar mot nedanstående elektriska krets



- y_j, $j = 1, \ldots, 5$ betecknar potentialen i nod j.
- x_{ij} betecknar strömmen genom båge (i, j).
- u_{ij} betecknar spänningen över resistorn i båge (i, j).

Vänstra nollrummet

Tolkning: Ekvationen $\tilde{\mathbf{y}}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{u}$ svarar mot krav på spänningarna över bågarna

$$y_i - y_j = u_{ij} \qquad \text{spänning} = \text{differens mellan potentialer}$$

Det finns ingen unik lösning: En godtycklig konstant till samtliga nodpotentialer utan att förändra spänningarna över bågarna.

$\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \mathbf{u}$ svarar mot att potentialen y_5 är fixerad till noll (jordad).

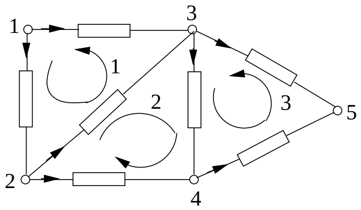
$$\mathcal{N}(\tilde{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}) = \text{span}\left\{ \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Om $\tilde{y} \in \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}})$, då gäller $u = 0$. *d.v.s.*, om alla potentialer är lika så är alla spänningar noll.

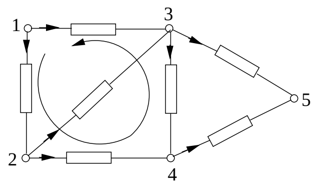
Nollrummet

$$\mathcal{N}(\tilde{\mathbf{A}}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^7 : \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{N}(\mathbf{A})$$

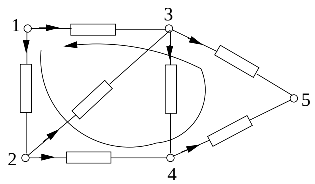
Tolkning: Nollrummet svarar mot tre slingor i grafen.



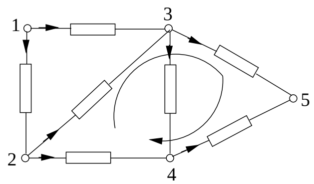
Övriga slingor i grafen erhålls som linjärkombinationer av de tre "basslingorna" i föregående figur.



Basslinga 1 − basslinga 2



Basslinga 1 − basslinga 2 + basslinga 3



Basslinga 2 − basslinga 3

Flödet in/ut ur kretsen påverkas inte av strömmen $\tilde{\mathbf{x}}$ i en cykel eftersom $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = 0$.

Radrummet

$$\mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}}^\mathsf{T}) = \left\{\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{A}}^\mathsf{T}\tilde{\mathbf{y}}\right\} \qquad (= \{\mathbf{u} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}\})$$
$$= \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{A}})^\perp \qquad (= \mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp)$$
$$= \left\{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^7 : u_{13} = u_{12} + u_{23};\ u_{24} = u_{23} + u_{34};\ u_{35} = u_{24} + u_{45}\right\}$$

Tolkning: Summan av spänningarna över en cykel (slinga) är lika med noll. Detta kallas också Kirchoff's spänningslag.

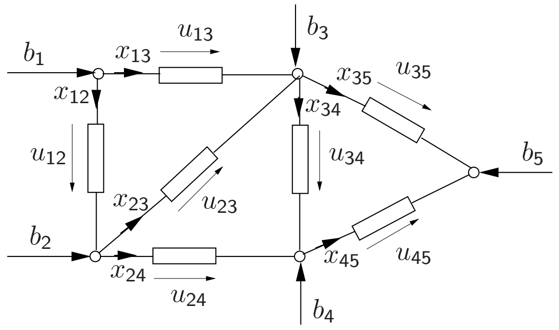
Notera att det finns fler slingor, t.e.x. har vi villkoret $u_{12} + u_{24} = u_{13} + u_{34}$, men dessa villkor erhålls linjär kombinationer av de övriga (se föregående OH-bild).

Bildrummet

$$\mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}}) = \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{A}}^\mathsf{T})^\perp = \{\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m : \mathbf{e}^\mathsf{T}\mathbf{b} = 0\}$$
$$= \{\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m : \sum_{k=1}^m b_k = 0\}$$

Om b_j tolkas som en extern ström som matas in i nod j så säger resultatet att summan av dessa strömmar måste vara noll.

Kirchoff's lagar



- Kirchoff's strömlag: Summan av strömmarna in till en nod är noll. För kretsen i figuren kan detta skrivas $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ett krav är naturligtvis att $\sum_{j=1}^m b_j = 0$.
- Kirchoff's spänningslag: Summan av spänningarna över en cykel (slinga) är lika med noll.

Läsanvisningar

Linjär optimering, gröna häftet, sidan 36-40.