Föreläsning 6: Dualitet

1. Dualitet för LP på kanonisk form.
   - Dualitet, komplementaritet, och tolkningar.
2. Dualitet för allmäna LP problem
3. Dualitet för LP på standardform

Läsanvisning för OH-bilderna:

- Den geometriska tolkning av komplementaritetsvillkoren läses kursivt. Liknande tolkningar återkommer senare i kursen där det kommer att vara enklare att förstå.
- Den ekonomiska tolkningen av primal- och dualproblemet läses kursivt.

Dualitet för LP på kanonisk form

Primal

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \text{minimera} & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{då} & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

Dual

$$(D)\quad \begin{array}{ll} \text{maximera} & \mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \\ \text{då} & \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq 0 \end{array}$$

Primalt tillåtet område

$\mathcal{F}_P = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b};\ \mathbf{x} \geq 0\}$

$\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}_P$ är optimal lösning om

$\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x},\ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}_P$

Dualt tillåtet område

$\mathcal{F}_D = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m : \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c};\ \mathbf{y} \geq 0\}$

$\hat{\mathbf{y}} \in \mathcal{F}_D$ är optimal lösning om

$\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y},\ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{F}_D$

Hur är primalen och dualen relaterade?

Betrakta följande primal och motsvarande dual

Primal

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \text{minimera} & x_1 + x_2 \\ \text{då} & \frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \geq 200 \\ & \frac{1}{60}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \geq 400 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

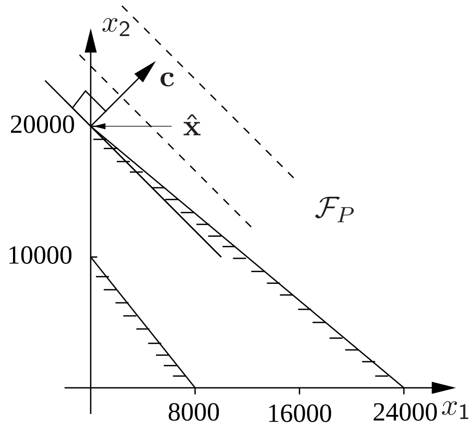
Dual

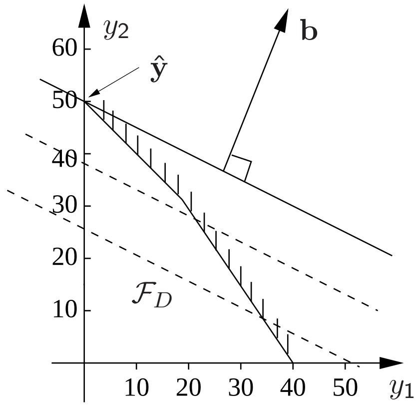
$$(D)\quad \begin{array}{ll} \text{maximera} & 200y_1 + 400y_2 \\ \text{då} & \frac{1}{40}y_1 + \frac{1}{60}y_2 \leq 1 \\ & \frac{1}{50}y_1 + \frac{1}{50}y_2 \leq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Hur förhåller sig

- optimalvärdena?
- målfunktionernas värde? (för godtyckliga tillåtna punkter)
- optimallösningen och bivillkoren vid optimalitet?

Illustration av tillåtna området, isokostlinjer, samt optimal punkt





- Optimalvärdena är lika $\mathbf{c}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}} = 20000$
- För varje $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_P$ och $\mathbf{y} \in \mathcal{F}_D$ gäller $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq \mathbf{c}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$

Inför

$$\hat{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (S)$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \mathbf{c} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (R)$$

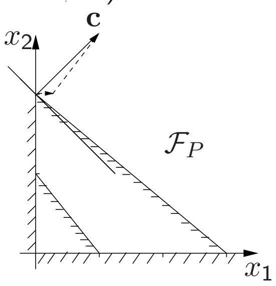
Optimallösningen uppfyller

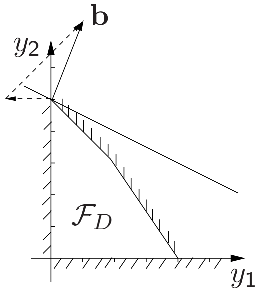
1. $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$ (primal tillåtenhet)
2. $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{c} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}$ (dual tillåtenhet)
3. $x_j r_j = 0$, $j = 1, 2$ och $y_i s_i = 0$, $i = 1, 2$ (komplementaritet)

Komplementaritetsvillkoren kan tolkas geometriskt. Från (R) och (S) ser vi att $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{A}^T\hat{\mathbf{y}}$ och $\mathbf{b} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{s}}$, dvs

$$(R) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{6} + \begin{bmatrix} \frac{1}{60} \\ \frac{1}{50} \end{bmatrix} 50 \qquad (S) \begin{bmatrix} 200 \\ 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{50} \\ \frac{1}{50} \end{bmatrix} 20000 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 200$$

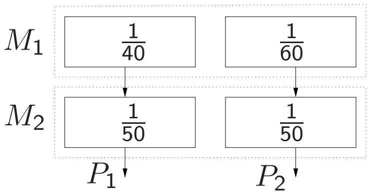
följer att målfunktionernas gradienter ($\mathbf{c}$ respektive $\mathbf{b}$) kan skrivas som linjärkombinationer av de bindande bivillkoren. Detta illustreras i figuren (dock inte i korrekt skala)





Ekonomisk tolkning

- Vi betraktar produktion av två produkter P_1 och P_2
- Maskinerna M_1 och M_2 används vid produktion av såväl P_1 som P_2
- Produktionskapaciteten för maskinerna [dygn/enhet]:



- Priset för produkterna [KKr/enhet]:

produkt	pris
P_1	$b_1 = 200$
P_2	$b_2 = 400$

- I dualen bestäms produktionsvolymen så att profiten maximeras.

Antag att du har alternativet att hyra ut maskinerna M_1 och M_2. Vilket är det minsta tänkbara priset x_k KKr/dygn för att hyra ut M_k, $k = 1, 2$.

Minsta priset erhålls ur följande optimeringsproblem

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{då} \quad & \tfrac{1}{40}x_1 + \tfrac{1}{50}x_2 \geq 200 \\ & \tfrac{1}{60}x_1 + \tfrac{1}{50}x_2 \geq 400 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

där bivillkoren kräver att du tjänar minst lika mycket på att hyra ut maskinerna jämfört med din inkomst från produktion av P_1 och P_2.

- Primalen och dualen kan ses som alternativ till varandra.
  - Om du har som affärsidé att hyra ut M_1 och M_2 så ger dualen information om minsta produktionsvolym som krävs för att det skall vara lönt att istället använda maskinerna för produktion av P_1 och P_2.
  - Om din affärsidé är produktion av P_1 och P_2 så ger primalen information om minsta dygnspris för att det skall löna sig att istället hyra ut maskinerna.
- Vad som kallas primal respektive dual är egentligen godtyckligt eftersom man kan visa att dualen av dualen är primalen.

Teoretiska resultat

Följande resultat från Svanbergs gröna häfte bekräftar våra iakttagelser från exemplet.

Sats 1 (Svag dualitet). *För varje* $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_P$ *och varje* $\mathbf{y} \in \mathcal{F}_D$ *gäller att* $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$.

En direkt följd av detta är att om $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}_P$ och $\hat{\mathbf{y}} \in \mathcal{F}_D$ och $\mathbf{c}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}}$ så är $\hat{\mathbf{x}}$ och $\hat{\mathbf{y}}$ optimal till (P) respektive (D).

Sats 2 (Stark dualitet). *Vi har följande fyra alternativ för optimeringsproblemen* (P) *och* (D)

(a) $\mathcal{F}_P \neq \emptyset$, $\mathcal{F}_d \neq \emptyset$. *Då finns (minst) en optimal lösning* $\hat{\mathbf{x}}$ *till* (P) *och (minst) en optimal lösning* $\hat{\mathbf{y}}$ *till (D). Dessa uppfyller* $\mathbf{c}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}}$.

(b) $\mathcal{F}_P \neq \emptyset$ *men* $\mathcal{F}_D = \emptyset$. *Då är primalen nedåt obegränsad.*

(c) $\mathcal{F}_D \neq \emptyset$ *men* $\mathcal{F}_P = \emptyset$. *Då är dualen uppåt obegränsad.*

(d) $\mathcal{F}_P = \emptyset$ *och* $\mathcal{F}_D = \emptyset$.

- Beviset av (a) är icke-trivialt och använder sig typiskt av Farkas lemma.
- Fall (b) inses intuitivt eftersom det saknas nedre gräns för primalen om dualen inte har någon tillåten lösning. Motsvarande tolkning gäller för (c).

Notation

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 & \dots & \hat{\mathbf{a}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_m^\mathsf{T} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

Sats 3 (Komplementaritetssatsen). $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ *är optimal till* (P) *och* $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ *är optimal till* (D) *om och endast om (omm)*

$$\begin{aligned} x_j \geq 0,\ r_j \geq 0,\ x_j r_j = 0, &\quad j = 1, \dots, n, \\ y_i \geq 0,\ s_i \geq 0,\ y_i s_i = 0, &\quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

där $\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$ *och* $\mathbf{r} = \mathbf{c} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}$.

Terminologi:

- Enkla bivillkor för primalen: $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$.
- Allmäna bivillkor för primalen: $s_i = \bar{\mathbf{a}}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} - b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$.
- Enkla bivillkor för dualen: $y_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$.
- Allmäna bivillkor för dualen: $\mathbf{r}_j = \mathbf{c}_j - \hat{\mathbf{a}}_j^\mathsf{T}\mathbf{y} \geq 0$, $j = 1, \dots, n$.

En konsekvens av komplementaritetssatsen är att

- Om $r_j = c_j - \hat{\mathbf{a}}_j^\mathsf{T}\mathbf{y} > 0$ så är $x_j = 0$,
  d.v.s primalens $j:e$ enkla bivillkor är bindande.
- Om $y_i > 0$ så är $s_i = \bar{\mathbf{a}}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} - b_i = 0$,
  d.v.s. primalens $i:e$ allmäna bivillkor är bindande.
- Om $s_i = \bar{\mathbf{a}}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} - b_i > 0$ så är $y_i = 0$,
  d.v.s. dualens $i:e$ enkla bivillkor är bindande.
- Om $x_j > 0$ så är $r_j = c_j - \hat{\mathbf{a}}_j^\mathsf{T}\mathbf{y} = 0$,
  d.v.s. dualens $j:e$ allmäna bivillkor är bindande.

Geometrisk tolkning av komplementaritetsvillkoren

Låt $\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \in \mathbf{R}^n$ med 1:an i position j. Då kan vi skriva

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \sum_{j:r_j>0} \mathbf{e}_j r_j + \sum_{i:y_i>0} \bar{\mathbf{a}}_i y_i$$

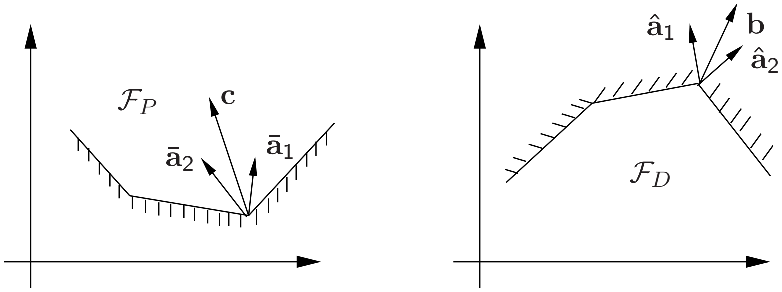
d.v.s. primala målfunktionens gradient är en linjärkombination (med positiva koefficienter) av de aktiva bivillkorens normalvektorer.

Låt $\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \in \mathbf{R}^m$ med 1:an i position i. Då kan vi skriva

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{s} = \sum_{j:x_j>0} \hat{\mathbf{a}}_j x_j - \sum_{i:s_i>0} \mathbf{e}_i s_i$$

d.v.s. den duala målfunktionens gradient är en linjärkombination (med positiva koefficienter) av de aktiva bivillkorens normalvektorer.

Grafisk illustration av den geometriska tolkningen.



- $\mathbf{c}$ kan skrivas som linjärkombination av $\bar{\mathbf{a}}_1$ och $\bar{\mathbf{a}}_2$
- $\mathbf{b}$ kan skrivas som linjärkombination av $\hat{\mathbf{a}}_1$ och $\hat{\mathbf{a}}_2$

Dualitet för allmäna LP-problem

Primal		Dual	
minimera	$\mathbf{c}_1^\mathsf{T}\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^\mathsf{T}\mathbf{x}_2$	maximera	$\mathbf{b}_1^\mathsf{T}\mathbf{y}_1 + \mathbf{b}_2^\mathsf{T}\mathbf{y}_2$
då	$\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{b}_1$	då	$\mathbf{A}_{11}^\mathsf{T}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{21}^\mathsf{T}\mathbf{y}_2 \leq \mathbf{c}_1$
	$\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$		$\mathbf{A}_{12}^\mathsf{T}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{22}^\mathsf{T}\mathbf{y}_2 = \mathbf{c}_2$
	$\mathbf{x}_1 \geq 0, \mathbf{x}_2$ fri		$\mathbf{y}_1 \geq 0,\ \mathbf{y}_2$ fri

Två metoder för härledning av dualen

- Överför på kanonisk form för vilken dualen är känd.
- Genom att använda Lagrangerelaxering (mer om detta senare i kursen).

Dualitet för LP på standardform

	Primal			Dual	
	minimera	$\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$		maximera	$\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x}$
(P)	då	$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$	(D)	då	$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$
		$\mathbf{x} \geq 0$			

$$\mathcal{F}_P = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b};\ \mathbf{x} \geq 0\} \qquad \mathcal{F}_D = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m : \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}\}$$

Svag dualitet: $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_P$ och $\mathbf{y} \in \mathcal{F}_D$

$$\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{c} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y})^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq 0.$$

Komplementaritet: $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_P$ och $\mathbf{y} \in \mathcal{F}_D$ är optimal till (P) respektive (D) om och endast om $(\mathbf{c} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y})^\mathsf{T}\mathbf{x} = 0$, d.v.s om $(c_i - \hat{\mathbf{a}}_i^\mathsf{T}\mathbf{y}) \cdot x_i = 0$

Konsekvens av komplementaritet

Antag att vi med hjälp av simplexmetoden hittat en optimal lösning till primalen (P). Detta betyder att vi har indexvektorer $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ och $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_l)$ så att

$$\begin{cases} \mathbf{x}_\beta = \mathbf{A}_\beta^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x}_\delta = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta \\ \mathbf{r}_\delta = \mathbf{c}_\delta - \mathbf{A}_\delta^\mathsf{T}\mathbf{y} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta \\ \mathbf{A}_\delta^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}_\delta \\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{c}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{x}_\beta = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} \end{cases}$$

Den sista implikationen betyder att $\mathbf{y}$ är optimal till (D).

Antag omvänt att om vi har hittat en optimal lösning $\mathbf{y}$ till dualen (D). Vi kan konstruera en optimal lösning $\mathbf{x}$ till primalen genom att uttnyttja komplementaritetsvillkoret

$$(c_i - \hat{\mathbf{a}}_i^\mathsf{T}\mathbf{y}) \cdot x_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Om $c_i - \hat{\mathbf{a}}_i^\mathsf{T}\mathbf{y} > 0$ så gäller att $x_i = 0$, d.v.s. $i \in \delta$ (icke-basvariabel). Om det finns $n - m$ sådana icke-bindande duala bivillkor så har vi funnit en basindexvektor β varvid optimala x ges av

$$\mathbf{x}_\beta = \mathbf{A}_\beta^{-1}\mathbf{b} \text{ och } \mathbf{x}_\delta = 0$$

Om dualen är billig att lösa så är detta ett bra alternativ, d.v.s. om $n >> m$.

Exempel

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\ \text{då} \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_2 + x_1 = 1 \\ & x_k \geq 0, k = 1, \ldots, 5 \end{aligned}$$

Dualen blir

$$\begin{aligned} \text{maximera} \quad & y \\ \text{då} \quad & 5y \leq 1,\ 4y \leq 2,\ 3y \leq 3,\ 2y \leq 4,\ y \leq 5 \end{aligned}$$

vilken har optimala lösningen $\hat{y} = \frac{1}{5}$. Från komplementaritetsvillkoret ser man att $\hat{x}_2 = \hat{x}_3 = \hat{x}_4 = \hat{x}_5 = 0$ och för att primala bivillkoret skall vara uppfyllt behöver vi då $\hat{x}_1 = \frac{1}{5}$. Detta är optimallösningen till primalen.

Läsanvisningar

- Linjär Optimering, Gröna häftet, sidorna 23-28.