



TENTAMEN I SF1851 OPTIMERINGSLÄRA FÖR E.

13 JANUARI, 2011 KL. 0800-1300

Examinator: Amol Sasane (Tel: 790 7320)

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Instruktioner: Motivera dina svar noggrant. Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

För godkänt krävs 25 poäng. Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1.(a). Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

-
- (1) (a) Betrakta problemet

$$\begin{cases} \text{minimera} & (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + e^{x_3} \\ \text{sådana att} & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Kontrollera att målfunktionens Hessian är positivt definit i alla punkter i \mathbb{R}^3 . Börja med $x^{(0)} = 0 \in \mathbb{R}^3$, och genomför en iteration med Newtons metod för att hitta den nya punkten $x^{(1)}$.

Kommer följden $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ som fås fram i detta exempel från Newtons metod konvergera? Om ja, till vilken punkt konvergerar den? Om inte, förklara varför inte.

(5 poäng)

- (b) Betrakta A som ges av

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hitta en bas för nollrummet till A och en bas för bildrummet till A .

(4 poäng)

- (2) (a) Betrakta följande linjärprogrammeringsproblem (P):

$$(P) : \begin{cases} \text{minimera} & c^\top x \\ \text{sådana att} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{cases}$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 40 \\ 35 \\ -30 \\ -25 \\ -20 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Från matrisen A :s och b :s speciella struktur, följer det att problemet (P) är ett balanserat nätverksflödesproblem. Rita motsvarande nätverk.

Kontrollera att

$$\hat{x} = [40 \ 0 \ 50 \ 25 \ 0 \ 20 \ 0]^\top$$

är en optimal lösning till problemet (P) genom att använda metoden för att lösa balanserade nätverksflödesproblem.

(7 poäng)

- (b) Skriv ner det duala problemet (D) för linjärprogrammeringsproblemet (P) ovan.
(3 poäng)

- (3) (a) Bestäm om matrisen

$$H := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

är positivt semidefinit.

(2 poäng)

- (b) Verifiera att $\hat{x} = [1 \ 1 \ 1]^\top$ är en optimal lösning till följande kvadratiske optimeringsproblem genom att använda Lagranges metod:

$$\begin{cases} \text{minimera} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 \\ \text{sådana att} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

(3 poäng)

- (c) Antag att C är en konvex delmängd av \mathbb{R}^n . Vad betyder det när man säger att $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ är en konvex funktion?

(2 poäng)

- (d) Betrakta funktionen $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ som ges av

$$\varphi(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Är φ en konvex funktion? Motivera ditt svar.

(3 poäng)

- (4) (a) Betrakta funktionen $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ som ges av

$$g(x_1, x_2) = x_1^4 - 12x_1x_2 + x_2^4, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Hitta alla lokala minimipunkter till g i \mathbb{R}^2 . Motivera ditt svar.

(5 poäng)

- (b) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet

$$(\text{LP}) : \begin{cases} \text{minimera} & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \\ \text{sådana att} & 6x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 18 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Använd simplexmetoden för att lösa linjärprogrammeringsproblemet (LP). Börja med den tillåtna baslösningen $x = [3 \ 0 \ 0 \ 0]^\top$.

(5 poäng)

- (5) Betrakta följande problem:

$$\begin{cases} \text{minimera} & x_1^4 + x_2^4 \\ \text{sådana att} & x_1^2 \leq 1, \\ & x_2^2 \leq 1, \\ & e^{x_1+x_2} \leq 1. \end{cases}$$

- (a) Är den tillåtna mängden en konvex mängd?

Är målfunktionen en konvex funktion?

Är problemet ett reguljärt konvext optimeringsproblem? Motivera ditt svar.

(6 poäng)

- (b) Skriv ner KKT-villkoren som associeras med detta optimeringsproblem.

Hitta alla globala optimala lösningar till problemet. Motivera ditt svar.

(5 poäng)

Slut på tentamen.