KTH Matematik

Hemuppgift 2, SF1851 Optimeringslära för E

Examinator: Per Enqvist, tel: 790 6298, *penqvist@math.kth.se*.

Assistent: Maja Karasalo, tel: 790 8433, *karasalo@math.kth.se*

Lämnas in skriftligen till någon av Per, Maja, Ulf, Anders eller Johan senast onsdagen den 30:e september kl 17.00.

I denna uppgift är samarbete tillåtet, men varje student ska själv, med egna ord, redovisa sina resultat och hur uppgiften lösts där så anges nedan. Utskrift av Matlabkod och körning ska bifogas, så att man kan se hur optimeringen konvergerar i (a)-uppgiften och ett av fallen i (d)-uppgiften.
Svaren på frågorna skall finnas i detta häfte, inte i Matlabkoden eller utskrifter. Skriv på baksidan om du inte får plats. Det är inte tillåtet att kopiera någon annans rapport! Vissa studenter kommer att väljas ut för enskild muntlig redovisning av uppgifterna. Kallelse sker via e-post, så kontrollera regelbundet denna. Korrekt löst och redovisad uppgift ger fyra hemtalspoäng.

Namn: .....

Personnummer: .....

E-postadress: .....

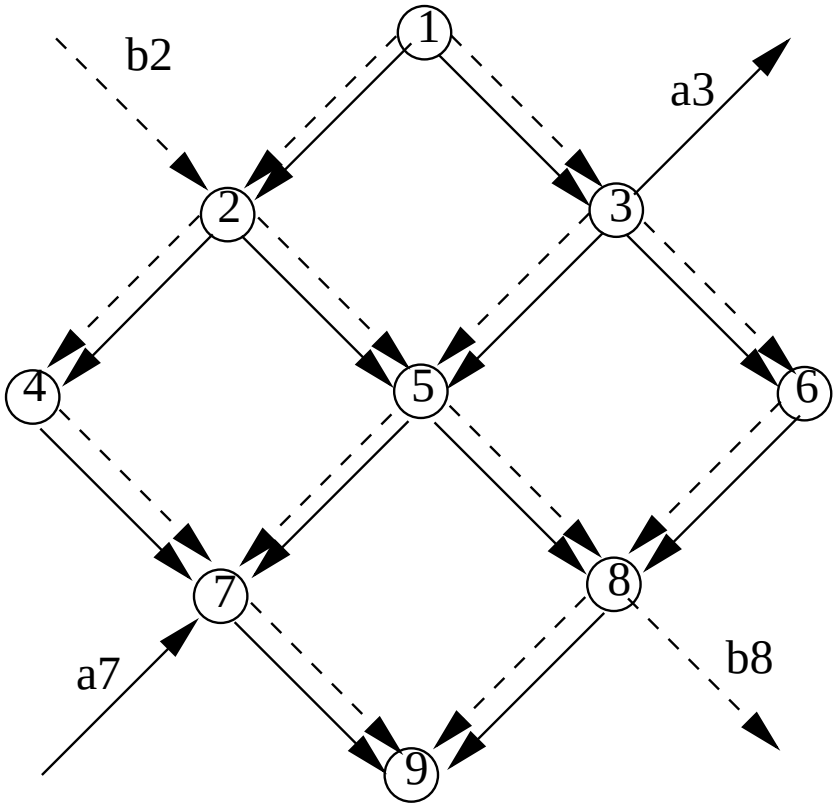
Personer jag samarbetat med: .....
.....
(om du inte löst uppgiften helt på egen hand)

---

1. I denna hemuppgift ska du formulera några nätverksflödesproblem som linjära optimeringsproblem och sedan lösa dessa med hjälp av Matlab (eller godtyckligt annat program som ni önskar använda). Flödet kan exempelvis representera dataflöde, telefonsamtal, etc.

I nätverket i Figur 1 vill man skicka a enheter "A-flöde" från nod 7 till nod 3 och b enheter "B-flöde" från nod 2 till nod 8, där a och b är givna positiva konstanter. Vi kommer att tillåta att flödena går åt båda hållen i bågarna, men definerar ett flöde som positivt om det går "sydväst" eller "sydöst", dvs i pilarnas riktning i figuren.

Man kan tänka sig att de olika flödena representerar olika varor som flödar genom samma distributionssystem. Vi kommer att reda ut hur dessa påverkar varandra och vad som händer då man inför begränsningar på kapaciteten i nätverket. Man kan notera två godtyckliga enheter av flöde A anses utbytbara och på samma sätt anses två godtyckliga enheter av flöde B utbytbara. Däremot är en enhet av flöde A och en enhet av flöde B ej utbytbara.



Figur 1: Grafisk beskrivning av det aktuella nätverket.

Vi kommer att behöva variabler som talar om hur de respektive flödena går, så definiera:

$$\mathbf{x}_A = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{24} \\ a_{25} \\ a_{35} \\ a_{36} \\ a_{47} \\ a_{57} \\ a_{58} \\ a_{68} \\ a_{79} \\ a_{89} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{13} \\ b_{24} \\ b_{25} \\ b_{35} \\ b_{36} \\ b_{47} \\ b_{57} \\ b_{58} \\ b_{68} \\ b_{79} \\ b_{89} \end{bmatrix}$$

Flödesbalans för A-flödet kan då skrivas $\mathbf{A}\mathbf{x}_A = \mathbf{a}$, för någon matris $\mathbf{A}$ och någon vektor $\mathbf{a}$. Utgående från nätverket i Figur ska du fylla i dessa nedan:

Använd så många rader och kolumner som du behöver.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Flödesbalans för B-flödet kan också skrivas $\mathbf{A}x_B = \mathbf{b}$, för samma matris $\mathbf{A}$ och någon vektor $\mathbf{b}$.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \\ ___ \\ \\ ___ \\ ___ \\ ___ \\ ___ \\ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \\ ___ \\ \\ ___ \\ ___ \\ ___ \\ ___ \\ \end{bmatrix}$$

Inför en kostnad för A-flödet

$$c_A(\mathbf{x}_A) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}} c_{i,j}|a_{ij}|,$$

där $\mathcal{B}$ är mängden av bågar i det aktuella nätverket.

Notera att vi har ett absolutbeloppstecken här, vi vill ju ha en kostnad som är positiv oberoende av vilket håll flödet går åt. (Om vi inte hade absolutbelopp så skulle vi få stora negativa flöden där kostnaderna är stora och problemet skulle bli obegränsat)

Problemet kan faktiskt fortfarande formuleras som ett linjärt optimeringsproblem.

Betrakta följande exempel: Om vi vill minimera $|\chi|$, så kan man införa en extra variabel γ och istället minimera γ under bivillkoret att $\gamma \geq |\chi|$. Eftersom bivillkoret

kan skrivas som att $\gamma \geq \chi$ och $\gamma \geq -\chi$ så har man omvandlat problemet till ett linjärt problem.

Denna tankegång kan generaliseras och användas på kostnadfunktionen ovan.

Vi kommer att använda kostnader $c_{i,j}$ som beror på erat 12-siffriga personnummer $p_1p_2p_3p_4\,p_5p_6p_7p_8\ -\ p_9p_{10}p_{11}p_{12}$ och eventuella nollor räknas som 10:

$$c_A = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{13} \\ c_{24} \\ c_{25} \\ c_{35} \\ c_{36} \\ c_{47} \\ c_{57} \\ c_{58} \\ c_{68} \\ c_{79} \\ c_{89} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ p_{10} \\ p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ___ \\ ___ \\ ___ \\ ___ \\ ___ \\ ___ \\ ___ \\ ___ \\ ___ \\ ___ \\ ___ \\ ___ \end{bmatrix}$$

(a) Betrakta nu först bara A-flödet (dvs inget B-flöde). Antag att A-flödet är 10 enheter.

Formulera optimeringsproblemet som minimerar kostnaderna och bestämmer det optimala A-flödet.

Använd Matlabs optimeringslösare `linprog` för att bestämma det optimala flödet.

Vad blir optimalvärdet ?

(b) Betrakta nu bara B-flödet (dvs inget A-flöde). Antag att B-flödet är 10 enheter. Inför en kostnad även för B-flödet

$$c_B(\mathbf{x}_B) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}} c_{i,j}|b_{ij}|,$$

Formulera optimeringsproblemet som minimerar kostnaderna och bestämmer det optimala B-flödet.

Bestäm det flödet som minimerar kostnaderna.

Vad blir optimalvärdet ?

(c) Nu sätter vi ihop problemen, så vi vill minimera den totala kostnaden för både A och B-flödet. Skriv detta som ett gemensamt optimeringsproblem och lös detta med Matlab.

Formulera optimeringsproblemet som minimerar kostnaderna och bestämmer det optimala A- och B-flödet.

Notera att de båda flödena inte påverkar varandra och att lösningen borde bli samma som de separata lösningarna i (a) och (b).

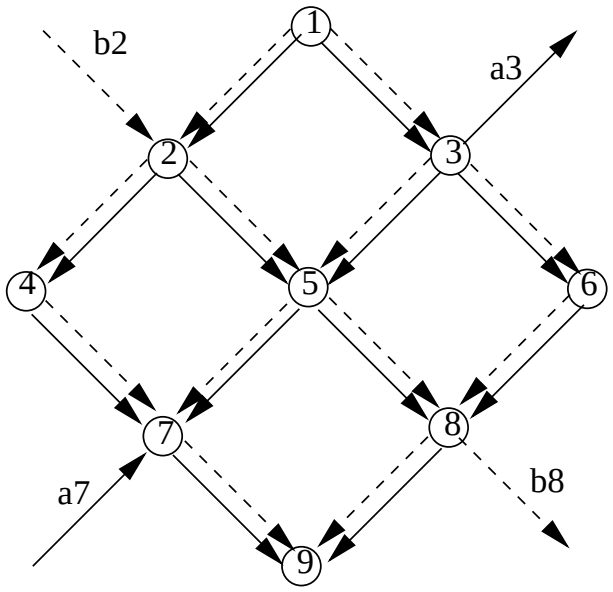
Vad blir optimalvärdet ?

(d) Nu inför vi en kapacitetsbegränsning för flödena i länkarna. Antag att flödet i var och en av länkarna (i absoluta tal - summerat oberoende av riktning) inte får överstiga τ.

Notera att detta nya bivillkor gör att A och B-flödena inte längre är oberoende

Formulera optimeringsproblemet som minimerar kostnaderna och bestämmer det optimala A- och B-flödet under kapacitetsbegränsningar.

Lös detta nya problem för $\tau = 10, 9, 8, \cdots$ tills det att problemet inte längre har några tillåtna lösningar.

Hur varierar optimalvärdet då τ minskas ?

Rita in det optimala A- och B-flödet i nätverket nedan för det minsta τ-värde som fortfarande ger en tillåten lösning.