Problem 1

Betrakta följande optimeringsproblem

$$\min \quad 8x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$$

$$\text{då} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 5$$

1. Visa att $x^{(1)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 0, 0, 0)$ är en tillåten baslösning till problemet.

2. Undersök om $x^{(1)}$ är optimal.

3. Om $x^{(1)}$ inte är optimal, hitta en ny tillåten baslösning genom att köra en iteration med simplexmetoden.

Lösning

Vi har ett problem på standardform

$$(P) \begin{cases} \min \ c^T x \\ \text{då} \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$c^T = [8\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 0]$ $\quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. $\beta = (1, 2)$ $\quad \nu = (3, 4, 5)$

$$A_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad A_\nu = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c_\beta^T = [8\ \ 2] \quad c_\nu^T = [1\ \ 1\ \ 0]$$

Vi visar att $x = (1\ 1\ 0\ 0\ 0)$, dvs $\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, är en tillåten baslösning.

$$A_\beta \bar{b} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = b$$

2. Vi beräknar y och r_ν.

$$A_\beta^T y = c_\beta \Rightarrow y = A_\beta^{-T} c_\beta = \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r_\nu = c_\nu - A_\nu^T y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Eftersom $r_{\nu_1} < 0$ och $r_{\nu_2} < 0$, är lösningen inte <u>optimal</u>.

3. Eftersom $r_{\nu_1} = r_3$ är minst så blir x_3 ny basvariabel.

Vi ska nu beräkna vilken variabel som ska ut ur basen.

$$A_\beta \bar{a}_3 = a_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \bar{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_3 = A_\beta^{-1} a_3 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

$$t_{max} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,3}} , \bar{a}_{i,3} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{1}{5/6} , \frac{1}{4/3} \right\} = \left\{ \frac{1}{5/6} \right\}.$$

Eftersom $t_{max} = \left\{ \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{1,3}} \right\} = \left\{ \frac{1}{5/6} \right\}$ ska $x_{\beta_1} = x_1$ lämna basen.

Vi uppdaterar basen:

$\beta = (3, 2)$ $\nu = (1, 4, 5)$

$A_\beta = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $A_\nu = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$c_\beta^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ $c_\nu^T = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Eleverna utför nästa iteration.

Iteration 2

Steg 1: Beräkna $\bar{b}$, y och r_v.

$$\bar{b} = A_\beta^{-1} b = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$y = A_\beta^{-T} c_\beta = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$r_v = c_v - A_v^T y = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 22 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/5 \\ -2/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

Steg 2: Eftersom $r_{v_2} = r_4 < 0$ ska x_4 in i basen.

Vilken variabel ska ut?

$$\bar{a}_4 = A_\beta^{-1} a_4 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

$$t_{max} = \min\left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,4}}, \bar{a}_{i,4} > 0 \right\} = \min\left\{ \frac{6/5}{1/5}, \frac{13/5}{3/5} \right\} =$$

$$\frac{13}{3} = \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{2,4}} \Rightarrow x_{\beta_2} = x_2 \text{ lämnar basen.}$$

Steg 3: Up~~ta~~tatera basen: $\beta = (3,4)$ $v = (1,2,5)$

$$A_\beta = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_v = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c_\beta^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad c_v^T = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Iteration 3

Steg 1: beräkna $\bar{b}$, y och r_ν

$$\bar{b} = A_\beta^{-1} b = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$y = A_\beta^{-T} c_\beta = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$r_\nu = c_\nu - A_\nu^T y = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10/3 \\ 4/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 24-10 \\ 6-4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 14 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Steg 2: Eftersom $r_\nu \geq 0 \Rightarrow x^* = [0\ 0\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{13}{3}\ 0]^T$ är optimal.

Fas 1 problem: Hur hittar man en tillåten baslösning?

Hitta en tillåten baslösning till problemet (P) genom att använda fas 1-metoden.

$$(P)\begin{cases} \min & 8x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{då} & \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 1 \end{cases} \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

Vi lägger till två extravariabler x_6 och x_7 och formulerar ett nytt problem (P').

$$(P').\begin{cases} \min\ x_6+x_7 \\ \text{då } \begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4+x_6=4 \\ 2x_1-x_2+3x_3-x_5+x_7=1 \end{cases} \\ \quad x_i \geq 0 \quad i=1,\dots,7. \end{cases}$$

Till detta problem kan vi direkt hitta en tillåten baslösning $x^{(1)}=[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 4\ 1]^T$.

I optimum för (P') är $x_6=x_7=0$.

Om vi kör simplexmetoden på (P') och startar i $x^{(1)}$ kommer vi tillslut att hamna i optimum för (P') vilket är en tillåten baslösning för (P).

<u>Simplexmetoden:</u> Iteration 1:

$\beta=(6,7)$ $\quad \nu=(1,2,3,4,5)$.

$c^T=[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1]$ $\quad b=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_\beta=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \quad A_\nu=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$c_\beta^T=[1\ 1]$ $\quad c_\nu^T=[0\ 0\ 0\ 0\ 0]$

Steg 1. Beräkna $\bar{b}$, y och r_ν.

$$\bar{b} = A_\beta^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = A_\beta^{-T} c_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r_\nu = c_\nu - A_\nu^T y = - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Steg 2: Eftersom $r_{\nu_1} = r_1$ är mindre än noll och minst, ska x_1 in i basen.

Vilken variabel ska ut?

$$\bar{a}_1 = A_\beta^{-1} a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$t_{max} = \min\left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,1}}, \bar{a}_{i,1} > 0 \right\} = \min\left\{ \frac{4}{2}, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2} = \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{2,1}} \Rightarrow x_{\beta_2} = x_7 \text{ lämnar basen.}$$

Steg 3: Uppdatera basen. $\beta(6, 1)$ $\nu = (7, 2, 3, 4, 5)$.

$$A_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A_\nu = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_\beta = [1 \ 0]^T \quad c_\nu = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Iteration 2:

Steg 1: Beräkna $\bar{b}$, y och r_v.

$$\bar{b} = A_\beta^{-1} b = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$y = A_\beta^{-T} c_\beta = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$r_v = c_v - A_v^T y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Steg 2: Eftersom $r_{v_3} = r_{v_4} = r_{v_5} = -1$ kan vi välja om $x_{v_3} = x_3$ eller $x_{v_4} = x_4$ eller $x_{v_5} = x_5$ ska in i basen. Vi väljer x_4.

Vilken ska ut?

$$\bar{a}_4 = A_\beta^{-1} a_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eftersom endast $\bar{a}_{1,4} > 0$ så ska $x_{\beta_1} = x_6$ ut ur basen.

Steg 3: Uppdatera basen

$\beta = (4, 1)$ $\nu = (7, 2, 3, 6, 5)$.

$A_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $A_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$c_\beta = [0 \ 0]^T$ $c_\nu = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$.

Iteration 3: Beräkna $\bar{b}$, y och r_ν

$\bar{b} = A_\beta^{-1} b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$y = A_\beta^{-T} c_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$r_\nu = c_\nu = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$x^* = [1/2 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0]$ är optimal för (P')

och

$x^{**} = [1/2 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0]$ är en tillåten

baslösning för (P).