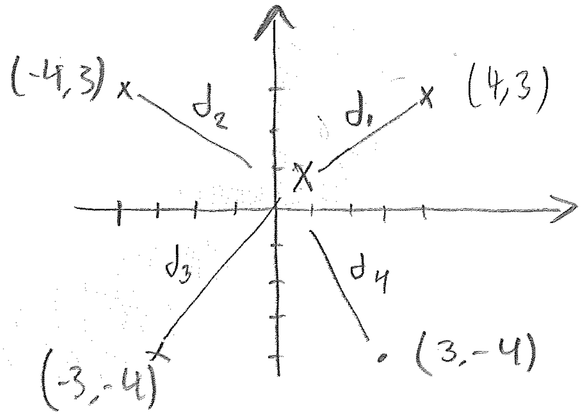
Icke-linjär minstakvadratanpassning

Vi har fyra störda mätningar utav avståndet från punkter med kända koordinater till en punkt med okänd koordinat.



$$\begin{cases} d_1 = 5{,}2 \\ d_2 = 5{,}1 \\ d_3 = 4{,}8 \\ d_4 = 4{,}9 \end{cases}$$

X ligger nära origo.

Uppgift: uppskatta $x = (x_1, x_2)$ mha Gauss-Newtons metod. Lös

$$\min f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} \left(\sqrt{(x_1 - a_i)^2 + (x_2 - b_i)^2} - d_i \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} h_i(x)^2 = \frac{1}{2} \| h(x) \|^2,$$

$$h(x) = [h_1(x)\ h_2(x)\ h_3(x)\ h_4(x)]^T$$

$$\| h(x) \|^2 = h(x)^T h(x),$$

där (a_i, b_i) är koordinater för de fyra kända punkterna.

Stegriktning d^k i Gauss-Newtons metod ges av

$$\nabla h(x^k)^T \nabla h(x^k) d = -\nabla h(x^k)^T h(x^k)$$

uppdatering sker mha

$$x^{k+1} = x^k + t d^k \quad \text{där } t \in [0,1]$$

S.k. backtracking används för att bestämma t

$t \leftarrow 1$
while $f(x^{k+1}) \geq f(x^k)$
 $t \leftarrow t/2$
 $x^{k+1} \leftarrow x^k + td$
end
$d^k \leftarrow td$

Startgissning: $x^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Beräkna $h(x^k)$ och $\nabla h(x^k)$

$$h(x^k) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ h_3(x) \\ h_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_1-4)^2 + (x_2-3)^2} - 5{,}2 \\ \sqrt{(x_1+4)^2 + (x_2-3)^2} - 5{,}1 \\ \sqrt{(x_1+3)^2 + (x_2+4)^2} - 4{,}8 \\ \sqrt{(x_1-3)^2 + (x_2+4)^2} \quad 4{,}9 \end{bmatrix}$$

$$\nabla h(x^k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x_1} & \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_4}{\partial x_1} & \frac{\partial h_4}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad \text{där}$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_1} = \frac{x_1 + a_i}{\sqrt{(x_1+a_i)^2 + (x_2+b_i)^2}}$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_2} = \frac{x_2 + b_i}{\sqrt{(x_1+a_i)^2 + (x_2+b_i)^2}}$$

$$h(x^1) = \begin{bmatrix} -0{,}2 \\ -0{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla h(x^1) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & -3 \\ 3 & 4 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\nabla h(x^1)^T \nabla h(x^1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I$$

$$\nabla h(x^1)^T h(x^1) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0{,}7 \\ 2{,}1 \end{bmatrix}$$

Lös MK-ekvationerna

$$\nabla h(x^k)^T \nabla h(x^k)\, d = -\nabla h(x^k)^T h(x^k)$$

för d

$$2I\, d = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0{,}7 \\ 2{,}1 \end{bmatrix} \Rightarrow d = -\begin{bmatrix} 0{,}07 \\ 0{,}21 \end{bmatrix}$$

Sätt $t = 1$ och beräkna

$$f(x^1 + 1 \cdot d) = f(d^1) = 7{,}7 \cdot 10^{-4} < f(x^1) = 0.05$$

Sätt $d^1 = td$,

$$x^2 = x^1 + d^1 = -\begin{bmatrix} 0{,}07 \\ 0{,}21 \end{bmatrix}$$

Upprepa tills något stoppvillkor är uppfyllt.