Hemuppgift 1, SF1861 Optimeringslära för T

Examinator: Per Enqvist, tel: 790 6298, *penqvist@math.kth.se*.

Assistenter: Johan Markdahl, *markdahl@math.kth.se*, Johan Thunberg, *jthu02@kth.se*.

Lämnas in till någon av oss senast måndagen den 11:e april på föreläsningen.

I denna uppgift är samarbete tillåtet, men varje student ska själv, med egna ord, redovisa sina resultat och hur uppgiften lösts där så anges nedan. Matlabkod och utskrifter ska bifogas.
Svaren på frågorna skall finnas i rapporten, inte i Matlabkoden eller utskrifter. Det är inte tillåtet att kopiera någon annans rapport!
Vissa studenter kommer att väljas ut för enskild muntlig redovisning av uppgifterna. Kallelse sker via e-post, så kontrollera regelbundet denna. Korrekt löst och redovisad uppgift ger fyra hemtalspoäng.

Namn: ....

Personnummer: ....

E-postadress: ....

Jag har använt matris nr: ...... (se uppgift 1 nedan)

Personer jag samarbetat med: ....
....
(om du inte löst uppgiften helt på egen hand)

Detta hemtal kommer främst att vara en övning i linjär algebra och syftar till att ge en ökad förståelse och intuition för begrepp som linjära underrum, bildrum, nollrum och hur man kan arbeta med dessa.
Ett linjärt underrum $\mathcal{X}$ till $\mathbb{R}^n$, är en mängd sådan att om $x_1 \in \mathcal{X}$ och $x_2 \in \mathcal{X}$ så gäller att även $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in \mathcal{X}$ för alla reella α_1 och α_2. Speciellt så tillhör alltid $x = 0$ varje underrum. I $\mathbb{R}^3$ så är ett underrum antingen: hela rummet, ett plan genom origo, en linje genom origo eller det triviala underrummet som bara består av punkten origo.
För att beskriva ett underrum använder man oftast en bas av vektorer. Om v_1, v_2, v_3 är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^5$ så spänner de upp ett (tredimensionellt) underrum

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in \mathbb{R}^5 \mid v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3, \alpha_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, 3. \right\}.$$

Ett enkelt sätt att representera ett underrum är alltså att ange en bas för detta, t.ex. genom att skapa en matris med basvektorerna som kolumner, $V = [v_1\ \ v_2\ \ v_3]$. En godtycklig vektor $v \in \mathcal{V}$ kan då skrivas $v = V\alpha$ där $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T$ är en vektor i $\mathbb{R}^3$.

1. Välj en 7×5–matris $\mathbf{A}$ på följande sätt. Låt $d \in \{1, 2, \ldots, 31\}$ vara den dag i månaden som du är född och låt $k \in \{0, 1, \ldots, 14\}$ vara den rest som erhålls när man dividerar d med 15. Som matris $\mathbf{A}$ ska du välja den av matriserna $\mathbf{A}_k$ på sidan 5 som svarar mot denna rest k och ringa in den. Matrisen kan hämtas på kursens hemsida
`http://www.math.kth.se/optsyst/grundutbildning/kurser/SF1861/`

(*a*) Transformera matrisen $\mathbf{A}$ till trappstegsform med hjälp av funktionen `rref` i Matlab (dvs Gauss-Jordans metod) och fyll i nedan:

$$R = \begin{bmatrix} \; & \; & \; & \; & \; \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}.$$

Bestäm därefter, med metodiken som beskrivs i optimeringskompendiet (OK) i kapitel 26 (använd inte matlabs kommando null), två matriser $\mathbf{V}_1$, och $\mathbf{V}_2$ sådana att
kolonnerna i $\mathbf{V}_1$ utgör en bas till underrummet $\mathcal{R}(\mathbf{A})$,
och kolonnerna i $\mathbf{V}_2$ utgör en bas till underrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.
Fyll i nedan: (stryk de rutor du inte behöver)

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \; & \; & \; & \; & \; \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \; & \; & \; & \; & \; \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Förklara hur du bestämmer $\mathbf{V}_1$ och $\mathbf{V}_2$ från $\mathbf{A}$ och R. ....
....
....
....
....
....
....
....

(*b*) Transformera matrisen $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ till trappstegsform med hjälp av funktionen `rref` i Matlab.

$$R_W = \begin{bmatrix} \; & \; & \; & \; & \; & \; & \; \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}.$$

Bestäm därefter, utgående från resultatet av denna transformation, två matriser $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$ sådana att
kolonnerna i $\mathbf{W}_1$ utgör en bas till underrummet $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$,
och kolonnerna i $\mathbf{W}_2$ utgör en bas till underrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \end{bmatrix}$$

(c) Beräkna $\mathbf{V}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{W}_2$ och $\mathbf{W}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{V}_2$ samt verifiera att resultaten stämmer med teorin.

Resultat: ....
....
....
....
Varför blir det så? ....
....
....
....
....

(d) Låt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^{\mathsf{T}}$ där $x_i =$ den i:te siffran i ditt personnummer.

Tillhör $\mathbf{x}$ nollrummet till $\mathbf{A}$? ....
....
....
Motivering: ....
....
....

Tillhör $\mathbf{x}$ bildrummet till $\mathbf{A}^T$? ....
....
....
Motivering: ....
....
....

Vi vet att $\mathbb{R}^5 = \mathcal{N}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$, så en godtycklig vektor i $\mathbb{R}^5$ kan skrivas som en summa av en vektor i nollrummet till A och en vektor i bildrummet till A^T.

Skriv $\mathbf{x}$ på formen $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{y}$ där $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ och $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$.
Använd dig av matriserna $\mathbf{V}_2$ och $\mathbf{W}_1$ ovan. Kolumnerna i dessa matriser bildar tillsammans en bas för $\mathbb{R}^5$.
Ange $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}$ samt kontrollera att $\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{z} = 0$.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 7 & 4 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 7 & 3 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 8 & 4 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 7 & 2 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

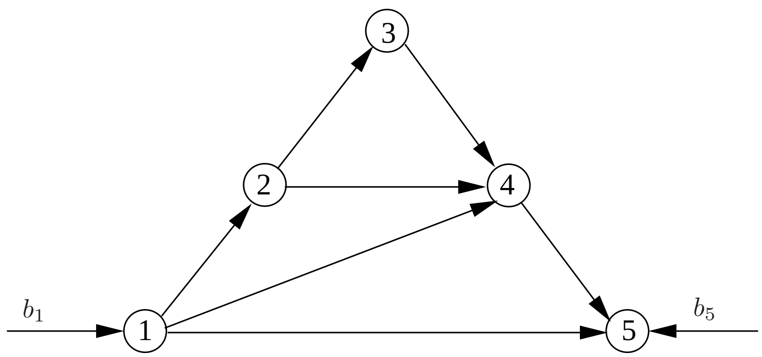
$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_7 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_8 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_9 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 7 & 4 & 7 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{10} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{14} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

2. I denna uppgift studeras ett nätverk som definieras av figuren nedan. Vi låter x_{ij} beteckna flödet i bågen (i, j) och det externa flödet till noderna betecknas b_i, för $i = 1, \dots, 5$. I figuren har vi bara ritat ut två sådana externa flöden. Vi kräver inte att ovanstående flöden x_{ij} ska vara positiva, om exempelvis x_{12} är negativ så betyder det att flödet i bågen $(1, 2)$ går från nod 2 till nod 1. På motsvarande sätt skall flödet b_1 tolkas som en källa om $b_1 > 0$ och som en sänka om $b_1 < 0$.



Flödesbalansen beskrivs av ekvationen

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}} \tag{1}$$

där

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{14} \\ x_{15} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{34} \\ x_{45} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$$

Matrisen $\tilde{\mathbf{A}}$ kallas vanligen incidensmatris.

(a) Transformera såväl $\tilde{\mathbf{A}}$ som $\tilde{\mathbf{A}}^\top$ till trappstegsform med hjälp av `rref`, samt bestäm baser till de fyra fundamentala underrummen svarande mot $\tilde{\mathbf{A}}$. Notera att trappstegsformen som uppstår efter att radoperationerna utförts med `rref` endast innehåller elementen $\{-1, 0, 1\}$. Detta är en speciell egenskap hos incidensmatriser.

(b) Bestäm basvektorer för nollrummet $\mathcal{N}(\tilde{\mathbf{A}})$,

$$v_1 = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1.5cm}} \\ \underline{\hspace{1.5cm}} \\ \underline{\hspace{1.5cm}} \\ \underline{\hspace{1.5cm}} \\ \underline{\hspace{1.5cm}} \\ \underline{\hspace{1.5cm}} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1.5cm}} \\ \underline{\hspace{1.5cm}} \\ \underline{\hspace{1.5cm}} \\ \underline{\hspace{1.5cm}} \\ \underline{\hspace{1.5cm}} \\ \underline{\hspace{1.5cm}} \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1.5cm}} \\ \underline{\hspace{1.5cm}} \\ \underline{\hspace{1.5cm}} \\ \underline{\hspace{1.5cm}} \\ \underline{\hspace{1.5cm}} \\ \underline{\hspace{1.5cm}} \end{bmatrix}, \quad .$$

Dessa motsvaras av så kallade loopflöden, dvs flöden som varken har källa eller sänka utan enbart går runt inne i nätverket. Vilka loopflöden svarar din bas mot? Rita in dessa i nätverksgrafen ovan.

(c) Låt $\mathbf{A}$ vara den matris som erhålls om man stryker den sista raden i $\tilde{\mathbf{A}}$ ovan, och $\mathbf{b}$ vara den vektor som erhålls om man stryker det sista elementet i $\tilde{\mathbf{b}}$. Antag att $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Vilket krav måste man då ställa på sista elementet i $\tilde{\mathbf{b}}$ för att $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$.

Motivering: ....

....

....

....

(d) Är nollrummen till $\mathbf{A}$ och $\tilde{\mathbf{A}}$ lika ? ....

Motivering: ....

....

....

....

Är bildrummen till $\mathbf{A}$ och $\tilde{\mathbf{A}}$ lika ? ....

Motivering: ....

....

....

....

Lycka till!