

Formelblad som delas ut på tentan i SF1861, 2011

Observera att det ej är tillåtet att använda räknare på tentan!

$$\mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top), \quad \mathcal{R}(\mathbf{A}^\top)^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}), \quad \mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{A}^\top), \quad \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{A}).$$

Simplexmetoden för LP-problem på standardform:

$$\mathbf{A}_\beta = [\mathbf{a}_{\beta_1} \cdots \mathbf{a}_{\beta_m}], \quad \mathbf{A}_\nu = [\mathbf{a}_{\nu_1} \cdots \mathbf{a}_{\nu_\ell}], \quad \mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}, \quad \bar{z} = \mathbf{c}_\beta^\top \bar{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{A}_\beta^\top \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta, \quad \mathbf{r}_\nu^\top = \mathbf{c}_\nu^\top - \mathbf{y}^\top \mathbf{A}_\nu.$$

Färdiga om $\mathbf{r}_\nu \geq \mathbf{0}$. Annars, välj ett q med $r_{\nu_q} < 0$. $k = \nu_q$, $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_k = \mathbf{a}_k$, $x_k = t$,

$$z = \bar{z} + r_k t, \quad \mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}_k t, \quad t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{pk}}. \text{ Låt } \nu_q \text{ och } \beta_p \text{ byta plats.}$$

Duala problemet till allmänt LP-problem:

$$\begin{array}{ll} \text{minimera} & \mathbf{c}_1^\top \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^\top \mathbf{x}_2 \\ \text{då} & \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_2 \geq \mathbf{b}_1, \\ & \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2, \\ & \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_2 \text{ fri.} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{maximera} & \mathbf{b}_1^\top \mathbf{y}_1 + \mathbf{b}_2^\top \mathbf{y}_2 \\ \text{då} & \mathbf{A}_{11}^\top \mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{21}^\top \mathbf{y}_2 \leq \mathbf{c}_1, \\ & \mathbf{A}_{12}^\top \mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{22}^\top \mathbf{y}_2 = \mathbf{c}_2, \\ & \mathbf{y}_1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}_2 \text{ fri.} \end{array}$$

Kvadratiske funktioner: $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + c_0$, med \mathbf{H} symmetrisk.

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (\mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{c})^\top, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}, \quad f(\mathbf{x} + t \mathbf{d}) = f(\mathbf{x}) + t (\mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{c})^\top \mathbf{d} + \frac{1}{2} t^2 \mathbf{d}^\top \mathbf{H} \mathbf{d}.$$

$\hat{\mathbf{x}}$ är en minpunkt till f om och endast om \mathbf{H} är positivt semidefinit och $\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

QP med likhetsbivillkor: minimera $\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + c_0$ då $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z} \hat{\mathbf{v}}, \quad (\mathbf{Z}^\top \mathbf{H} \mathbf{Z}) \hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{Z}^\top (\mathbf{H} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c}), \quad \begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{A}^\top \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

MN-lösning till MK-problem: $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \mathbf{A}^\top \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top \hat{\mathbf{u}}$.

Newton: $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^\top$ ger $\mathbf{d}^{(k)}$ om $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ är positivt definit.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + t_k \mathbf{d}^{(k)} \text{ där } t_k \text{ uppfyller } f(\mathbf{x}^{(k)} + t_k \mathbf{d}^{(k)}) < f(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Ickelinjär MK: minimera $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (h_i(\mathbf{x}))^2 = \frac{1}{2} |\mathbf{h}(\mathbf{x})|^2$, där $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$.

$\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})$ en $m \times n$ -matris med $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ i rad nr i och kolonn nr j .

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x})^\top \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}) \text{ (radvektor), } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})^\top \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \sum_i h_i(\mathbf{x}) \mathbf{H}_i(\mathbf{x}).$$

Gauss-Newton: $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})^\top \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{d} = -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})^\top \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})$ ger $\mathbf{d}^{(k)}$.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + t_k \mathbf{d}^{(k)} \text{ där } t_k \text{ uppfyller } f(\mathbf{x}^{(k)} + t_k \mathbf{d}^{(k)}) < f(\mathbf{x}^{(k)}).$$

NLP under likhetsbivillkor: minimera $f(\mathbf{x})$ då $h_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

Lagrange-villkoren: $\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_i \hat{u}_i \nabla h_i(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}^\top$ samt $h_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

NLP under olikhetsbivillkor: minimera $f(\mathbf{x})$ då $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$.

KKT-villkoren: $\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_i \hat{y}_i \nabla g_i(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}^\top$, $g_i(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$, $\hat{y}_i \geq 0$, $\hat{y}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$.