Krister Svanberg, mars 2012

1 Introduktion

De optimeringsproblem som kommer att behandlas i denna kurs kan alla (i princip) skrivas på följande allmänna form:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{då} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{F}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

där $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T} \in I\!\!R^n$ är en vektor innehållande de n st *variablerna*,
$\mathcal{F}$ är en given delmängd av $I\!\!R^n$, och
f är en given reellvärd funktion definierad (åtminstone) på mängden $\mathcal{F}$.
f kallas *målfunktionen* och $\mathcal{F}$ kallas *tillåtna området* till problemet (1.1).

Tre viktiga specialfall av det generella problemet (1.1) är, i stigande svårighetsordning, linjär optimering (LP), kvadratisk optimering (QP) och ickelinjär optimering (NLP).

Linjär optimering. Om målfunktionen är en linjär funktion och tillåtna området definieras av ett antal linjära olikheter, så har man ett så kallat LP-problem, efter engelskans *Linear Programming.* LP-problem kan exempelvis skrivas på formen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

där $\mathbf{c} \in I\!\!R^n$ och $\mathbf{b} \in I\!\!R^m$ är givna vektorer, $\mathbf{A}$ är en given $m \times n$ matris, medan $\mathbf{x} \in I\!\!R^n$ är variabelvektorn. Olikhetstecknet "$\geq$" ska här tolkas komponentvis, så $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ betyder m st linjära olikheter. Med beteckningar enligt (1.1) är $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ och $\mathcal{F} = \{\, \mathbf{x} \in I\!\!R^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$.

Kvadratisk optimering. Om målfunktionen är en kvadratisk funktion och tillåtna området definieras av ett antal linjära olikheter, så har man ett så kallat QP-problem, efter engelskans *Quadratic Programming.* QP-problem kan exempelvis skrivas på formen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

där $\mathbf{c} \in I\!\!R^n$ och $\mathbf{b} \in I\!\!R^m$ är givna vektorer, $\mathbf{A}$ är en given $m \times n$ matris, $\mathbf{H}$ är en given symmetrisk $n \times n$ matris, medan $\mathbf{x} \in I\!\!R^n$ är variabelvektorn. Även här ska olikhetstecknet "$\geq$" tolkas komponentvis, så $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ betyder m st linjära olikheter. Med beteckningar enligt (1.1) är $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ och $\mathcal{F} = \{\, \mathbf{x} \in I\!\!R^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$.

Ickelinjär optimering. NLP-problem, efter engelskans *Nonlinear Programming*, kan exempelvis skrivas på formen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{då} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \;\; i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{1.4}$$

där $\mathbf{x} \in I\!\!R^n$ är variabelvektorn medan $f,\ g_1, \ldots, g_m$ är givna funktioner från $I\!\!R^n$ till $I\!\!R$. Dessa funktioner förutsätts vara kontinuerligt deriverbara (och minst en av dem förutsätts dessutom vara ickelinjär ty annars är ju (1.4) ett LP-problem). Med beteckningar enligt (1.1) är $\mathcal{F} = \{\, \mathbf{x} \in I\!\!R^n \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ för } i = 1, \ldots, m\}$.

2 Linjär optimering (LP)

Att lösa ett *linjärt optimeringsproblem* består i att välja värden på ett antal *variabler* så att en given *målfunktion* antar ett så lågt värde som möjligt under kravet att vissa givna *bivillkor* blir uppfyllda. Den givna målfunktionen förutsätts vara *linjär* i variablerna, och de givna bivillkoren förutsätts bestå av *linjära olikheter* och eventuellt även *linjära likheter*.
På engelska heter det Linear Programming, som oftast översätts till linjär programmering (eller linjärprogrammering), men att använda ordet programmering kan leda tanken fel så vi försöker undvika det. Förkortningen LP är dock så vedertagen att vi accepterar den.
Förekomsten av linjära *olikheter* gör det till en icke-trivial historia att lösa LP-problem, eftersom man inte i förväg vet vilka av olikheterna som kommer att vara uppfyllda med *likhet* (dvs som *ekvationer*) i den optimala lösningen, och vilka som kommer att vara uppfyllda med *strikt olikhet*.

2.1 Dietproblemet – ett exempel på ett LP-problem

En fattig men mycket förståndig teknolog vill optimera sin diet. Givet är följande:
n stycken *födoämnen*, såsom morötter, blodpudding, sill, filmjölk, prinsesstårta, etc.
m stycken *näringsämnen*, såsom kolhydrater, protein, A-vitaminer, järn, riboflavin, etc.
c_j = priset (i butiken) per kilogram för det j:te födoämnet.
a_{ij} = antal enheter av det i:te näringsämnet som ingår per kilogram av det j:te födoämnet.
l_i och u_i = undre resp övre gräns på hur många enheter av det i:te näringsämnet som Livsmedelsverket (www.slv.se) rekommenderar teknologen att konsumera i genomsnitt per dag.

Frågan är nu hur mycket av respektive födoämne som teknologen ska konsumera i genomsnitt per dag för att minimera sina inköpskostnader utan att bryta mot de rekommenderade gränserna på näringsämnesintag?
Eftersom vår teknolog nyligen har tenterat den här kursen (och läst just denna sida) är formuleringen av följande LP-problem, i variablerna $x_1, \ldots, x_n$, uppenbar.

$$
\begin{aligned}
\text{minimera} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq l_i\,, \quad i = 1, \ldots, m, \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq u_i\,, \quad i = 1, \ldots, m, \\
& x_j \geq 0\,, \quad j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

I optimala lösningen till detta problem anger variabeln x_j den optimala kvantiteten, i kilogram, av det j:te födoämnet som teknologen ska konsumera i genomsnitt per dag.

Genom att lösa detta LP-problem får vår teknolog reda på den optimala dieten – ur kostnads- och näringssynpunkt alltså, någon hänsyn till smak och annat ovidkommande ingår som synes inte i modellen.

2.2 Ett produktionsproblem formulerat som LP-problem

Ett företag tillverkar de tre produkterna A, B och C.
Tillverkningen består av momenten *stansning* och *pressning*.
Varje produkt måste genomgå *bägge* momenten.

Stansavdelningen, som kan utnyttjas 8 timmar per dag, har följande kapacitet:
2000 enheter per timme av produkt A, eller
1600 enheter per timme av produkt B, eller
1100 enheter per timme av produkt C.
Avdelningen kan utan problem ställa om från en produkt till en annan.

Pressavdelningen, som kan utnyttjas 8 timmar per dag, har följande kapacitet:
1000 enheter per timme av produkt A, eller
1500 enheter per timme av produkt B, eller
2400 enheter per timme av produkt C.
Avdelningen kan utan problem ställa om från en produkt till en annan.

Täckningsbidraget (intäkt minus rörlig kostnad) per tillverkad enhet av respektive produkt är: 12 kr för A, 9 kr för B och 8 kr för C.

Företaget vill nu bestämma hur många enheter av respektive produkt som ska tillverkas (i genomsnitt) per dag för att det totala täckningsbidraget ska bli så stort som möjligt utan att man bryter mot avdelningarnas kapacitetsbegränsningar.

Låt oss införa följande variabler:

x_1 = antal enheter av produkt A som tillverkas per dag.
x_2 = antal enheter av produkt B som tillverkas per dag.
x_3 = antal enheter av produkt C som tillverkas per dag.

Då kan täckningsbidraget per dag skrivas $12x_1 + 9x_2 + 8x_3$,
medan kapacitetsbegränsningen i stansavdelningen kan skrivas $\dfrac{x_1}{2000} + \dfrac{x_2}{1600} + \dfrac{x_3}{1100} \le 8$,
och kapacitetsbegränsningen i pressavdelningen kan skrivas $\dfrac{x_1}{1000} + \dfrac{x_2}{1500} + \dfrac{x_3}{2400} \le 8$.

Det ger oss alltså följande LP-formulering:

$$
\begin{aligned}
\text{maximera} \quad & 12x_1 + 9x_2 + 8x_3 \\
\text{då} \quad & \frac{x_1}{2000} + \frac{x_2}{1600} + \frac{x_3}{1100} \le 8, \\
& \frac{x_1}{1000} + \frac{x_2}{1500} + \frac{x_3}{2400} \le 8, \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.
\end{aligned}
$$

2.3 Ett produktions- och lagerproblem formulerat som LP-problem

Ett företag har avtalat att leverera respektive p_1, p_2 och p_3 ton av en viss produkt (till en viktig kund) under de kommande 3 månadsskiftena. p_1, p_2 och p_3 är givna konstanter.

Varje månad kan företaget tillverka högst a ton till kostnaden c kr/ton. Genom att använda övertid kan man dessutom tillverka ytterligare högst b ton per månad till kostnaden d kr/ton. a, b, c och d är givna konstanter med $a > b$ och $d > c$.

De kvantiteter av produkten som tillverkas en viss månad men som inte behövs för leverans vid månadsskiftet kan lagras för leverans vid ett senare månadsskifte. Lagringskostnaden är ℓ kr per ton och månad som man lagrar. ℓ är en given konstant.

Om företaget inte levererar den avtalade kvantiteten ett visst månadsskifte, kan man istället leverera den saknade kvantiteten vid ett senare månadsskifte, dock inte senare än det 3:e och sista månadsskiftet. Avtalad förseningsavgift är f kr per ton och månad som man är försenad. f är en given konstant.

I början av månad 1 är lagret tomt, och man vill inte ha kvar något i lager efter de 3 månaderna. Vi kan anta att $p_1 + p_2 + p_3 < 3a + 3b$.

Vi ska nu formulera företagets planeringsproblem, i vilket företagets kostnader ska minimeras, som ett LP-problem.

Vi väljer att införa följande variabler:

x_j = antalet ton som tillverkas på normal arbetstid under månad j.
y_j = antalet ton som tillverkas på övertid under månad j.
z_j = antalet ton som levereras till kunden i slutet av månad j.
s_j = antalet ton som ligger i lagret under månad j.
u_j = antalet ton man är "skyldig" kunden i början av månad j
(ej inkluderande p_j, p_{j+1} etc.).

Då kan målfunktionen, som ska minimeras, skrivas $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}(c\,x_j + d\,y_j + \ell\,s_j + f u_j)$.

Bivillkoren som måste uppfyllas är följande:

$s_1 = 0,\ \ u_1 = 0,$
$x_1 + y_1 - z_1 - s_2 = 0,$
$x_2 + y_2 - z_2 + s_2 - s_3 = 0,$
$x_3 + y_3 - z_3 + s_3 = 0,$
$z_1 + u_2 = p_1,$
$z_2 + u_3 - u_2 = p_2,$
$z_3 - u_3 = p_3,$
$x_j \leq a$ och $y_j \leq b$ för $j = 1, 2, 3,$
samt att alla variabler måste vara ≥ 0.

Därmed är formuleringen klar.

2.4 Ett transportproblem formulerat som LP-problem

Givet är k st *kunder* (i vid mening) som var och en har en given *efterfrågan* av en viss vara. Givet är vidare ℓ stycken *leverantörer* (i vid mening) som var och en har en given *tillgång* av nyssnämnda vara. Givet är slutligen *transportkostnader* (per transporterad enhet) mellan varje par av leverantör och kund.

Det renodlade så kallade *transportproblemet* består i att bestämma hur stor kvantitet av varan som ska transporteras mellan respektive par av leveratör och kund. Man vill härvid uppnå att den totala transportkostnaden blir så liten som möjligt under kravet att kundernas givna efterfrågan blir uppfylld samtidigt som leverantörernas begränsade tillgångar beaktas.

Vi ska anta att problemet är *balanserat*, vilket innebär att summan av kundernas efterfrågan är lika med summan av leverantörernas tillgångar. Då kan transportproblemet, förkortat TP, skrivas på följande form:

$$
\begin{aligned}
\text{TP:} \qquad & \text{minimera} \quad \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_{ij} \\
& \text{då} \quad \sum_{j=1}^{k} x_{ij} = s_i\,, \quad \text{för } i = 1,\ldots,\ell \\
& \qquad\quad \sum_{i=1}^{\ell} x_{ij} = d_j\,, \quad \text{för } j = 1,\ldots,k \\
& \qquad\quad x_{ij} \geq 0\,, \quad \text{för alla } i \text{ och } j.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Här är
s_i = tillgången (supply) hos leverantör nr i,
d_j = efterfrågan (demand) hos kund nr j,
c_{ij} = transportkostnaden per enhet från leverantör nr i till kund nr j,
x_{ij} = transporterad kvantitet från leverantör nr i till kund nr j.

s_i, d_j och c_{ij} antas vara givna konstanter sådana att $\sum_i s_i = \sum_j d_j$ (dvs balanserat problem), medan x_{ij} är variablerna i problemet.

(Det är enkelt att transformera ett från början obalanserat problem till ett balanserat. Om den totala efterfrågan är mindre än totala tillgången, dvs $\sum_i s_i > \sum_j d_j$, så inför man en extra "dummykund" med efterfrågan $d_0 = \sum_i s_i - \sum_j d_j$ och transportkostnader $c_{i0} = 0$, eller c_{i0} = lagerkostnaden hos leverantör nr i om detta är en naturligare modell. Transporterade enheter från en leverantör till denna dummykund ligger då egentligen kvar hos leverantören. Om den totala efterfrågan är större än totala tillgången, dvs $\sum_i s_i < \sum_j d_j$, så inför man en extra "dummyleverantör" med tillgången $s_0 = \sum_j d_j - \sum_i s_i$ och transportkostnader c_{0j} = bristkostnaden per enhet för kund nr j. Transporterade enheter till en kund från denna dummyleverantör svarar då mot brist hos kunden.)

Det är ofta naturligt att tolka efterfrågan som en negativ tillgång, och därför skriva bivillkoren $\sum_i x_{ij} = d_j$ på formen $\sum_i(-x_{ij}) = -d_j$. Vi kommer fortsättningsvis att göra det.

Betrakta speciellt ett exempel med $\ell = 3$ (tre leverantörer) och $k = 5$ (fem kunder), och antag att indata, dvs konstanterna c_{ij}, s_i och d_j, ges i följande tablå:

c_{ij}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	s_i
$i=1$	4	5	7	6	3	55
$i=2$	4	3	4	3	4	50
$i=3$	5	5	6	4	3	45
d_j	40	25	20	30	35	

Om man inför variabelvektorn

$\mathbf{x} = (\ x_{11}\ \ x_{12}\ \ x_{13}\ \ x_{14}\ \ x_{15}\ \ x_{21}\ \ x_{22}\ \ x_{23}\ \ x_{24}\ \ x_{25}\ \ x_{31}\ \ x_{32}\ \ x_{33}\ \ x_{34}\ \ x_{35}\ )^{\mathsf{T}}$

och kostnadsvektorn

$\mathbf{c} = (\ c_{11}\ \ c_{12}\ \ c_{13}\ \ c_{14}\ \ c_{15}\ \ c_{21}\ \ c_{22}\ \ c_{23}\ \ c_{24}\ \ c_{25}\ \ c_{31}\ \ c_{32}\ \ c_{33}\ \ c_{34}\ \ c_{35}\ )^{\mathsf{T}} =$

$\quad = (\ 4\ \ 5\ \ 7\ \ 6\ \ 3\ \ 4\ \ 3\ \ 4\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 5\ \ 6\ \ 4\ \ 3\ )^{\mathsf{T}},$

så kan detta transportproblem skrivas på formen

$$\begin{aligned} \text{TP}: \qquad & \text{minimera} \quad \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ & \text{då} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

där

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 55 \\ 50 \\ 45 \\ -40 \\ -25 \\ -20 \\ -30 \\ -35 \end{pmatrix}.$$

Om m och n betecknar antalet rader respektive antalet kolonner i matrisen $\mathbf{A}$, så gäller tydligen att $m = \ell + k = 8$ och $n = \ell\, k = 15$.

2.5 LP-formuleringar av två linjeanpassningsproblem

Givet m stycken punkter $(t_1,\, s_1), \ldots, (t_m,\, s_m)$ till vilka man vill bestämma den linje på formen $s = kt + l$ som gör att den *största* vertikala avvikelsen mellan linjen och de givna punkterna blir så *liten* som möjligt, dvs de värden på konstanterna k och l som gör att det största av de m st talen $|\, kt_1 + l - s_1|, \ldots, |\, kt_m + l - s_m|$ blir så litet som möjligt.
Detta kan formuleras som följande LP-problem i de tre optimeringsvariablerna k, l och w :

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & w \\ \text{då} \quad & w \geq kt_i + l - s_i\,, \quad \text{för } i = 1, \ldots, m, \\ & w \geq s_i - kt_i - l\,, \quad \text{för } i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Genom att införa vektorerna
$\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_m)^\mathsf{T} \in I\!R^m$, $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)^\mathsf{T} \in I\!R^m$, $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)^\mathsf{T} \in I\!R^m$,
$\mathbf{x} = (k, l, w)^\mathsf{T} \in I\!R^3$, $\mathbf{c} = (0, 0, 1)^\mathsf{T} \in I\!R^3$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\mathbf{s} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} \in I\!R^{2m}$,
samt matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{t} & -\mathbf{e} & \mathbf{e} \\ \mathbf{t} & \mathbf{e} & \mathbf{e} \end{bmatrix} \in I\!R^{2m\times 3}$,
så kan detta problem ekvivalent skrivas på formen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

Antag nu i stället att man vill bestämma den linje på formen $s = kt{+}l$ som gör att *summan* av de m st vertikala avvikelserna mellan linjen och de givna punkterna blir så *liten* som möjligt, dvs de värden på konstanterna k och l som gör att summan $|\, kt_1 + l - s_1| + \cdots + |\, kt_m + l - s_m|$ blir så liten som möjligt.
Detta kan formuleras som följande LP-problem i optimeringsvariablerna k, l och $v_1, \ldots, v_m$:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \sum_{i=1}^{m} v_i \\ \text{då} \quad & v_i \geq kt_i + l - s_i\,, \quad \text{för } i = 1, \ldots, m, \\ & v_i \geq s_i - kt_i - l\,, \quad \text{för } i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Genom att införa vektorerna
$\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_m)^\mathsf{T} \in I\!R^m$, $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)^\mathsf{T} \in I\!R^m$, $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)^\mathsf{T} \in I\!R^m$,
$\mathbf{x} = (k, l, v_1, \ldots, v_m)^\mathsf{T} \in I\!R^{m+2}$, $\mathbf{c} = (0, 0, 1, \ldots, 1)^\mathsf{T} \in I\!R^{m+2}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\mathbf{s} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} \in I\!R^{2m}$,

samt matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{t} & -\mathbf{e} & \mathbf{I} \\ \mathbf{t} & \mathbf{e} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \in I\!R^{2m\times(m+2)}$, där $\mathbf{I}$ är $m{\times}m$ enhetsmatrisen,
så kan även detta problem ekvivalent skrivas på formen (2.5).

Anmärkning: Om man i stället vill bestämma den linje på formen $s = kt + l$ som gör att *kvadratsumman* av de m st vertikala avvikelserna mellan linjen och de givna punkterna blir så *liten* som möjligt, dvs de värden på konstanterna k och l som gör att summan $(\, kt_1 + l - s_1)^2 + \cdots + (\, kt_m + l - s_m)^2$ blir så liten som möjligt, så får man ett klassiskt "minsta-kvadratproblem" som är ett QP-problem. Mer om det i ett annat kursavsnitt.

2.6 Tre olika former på LP-problem

Det finns åtminstone tre olika etablerade sätt att formulera LP-problem. Vart och ett har sina fördelar och nackdelar. Rent teoretiskt är de tre sätten ekvivalenta, eftersom ett givet problem som har formulerats på ett av sätten alltid kan transformeras till en formulering på vilket som helst av de båda andra sätten, utan att själva problemet ändras.
Det första sättet att formulera LP-problem är som ett problem med enbart olikhetsbivillkor, som förutsätts vara av typen "$\geq$", och utan några teckenkrav på variablerna, dvs på formen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \,, \quad i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{2.7}$$

som på en mer kompakt form kan skrivas

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}} \mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

där $\mathbf{x} \in I\!R^n$ är variabelvektorn, $\mathbf{c} \in I\!R^n$ och $\mathbf{b} \in I\!R^m$ är givna vektorer, medan $\mathbf{A}$ är en given $m \times n$ matris med elementen a_{ij}.
Det andra sättet att formulera LP-problem är som ett problem med olikhetsbivillkor, av typen "$\geq$", *och* med teckenkrav på variablerna, dvs på formen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \,, \quad i = 1, \ldots, m, \\ & x_j \geq 0 \,, \quad j = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{2.9}$$

som på en mer kompakt form kan skrivas

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}} \mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Det tredje sättet att formulera LP-problem är som ett problem med likhetsbivillkor och med teckenkrav på variablerna, dvs på formen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \,, \quad i = 1, \ldots, m, \\ & x_j \geq 0 \,, \quad j = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{2.11}$$

som på en mer kompakt form kan skrivas

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}} \mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Nu följer ett exempel som visar hur man kan transformera ett givet LP-problem till vart och ett av de tre formerna ovan. Betrakta problemet

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{maximera} & 16x_1 & + & 14x_2 & - & 12x_3 & & \\
\text{då} & -x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\
 & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & \leq & 11 \\
 & 9x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & \geq & 13 \\
 & x_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & & & \geq & 0.
\end{array}
\tag{2.13}
$$

Antag att vi ska transformera problemet (2.13) till formen (2.8). Då behöver vi notera dels att ett maximeringsproblem övergår till ett ekvivalent minimeringsproblem om vi byter tecken på målfunktionen, dels att ett likhetsbivillkor kan skrivas som dubbla olikhetsbivillkor, dels att teckenkrav på variabler kan bakas in bland de övriga bivillkoren i $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$.
Problemet (2.13) kan då skrivas på formen (2.8) med

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 9 & 8 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -11 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -16 \\ -14 \\ 12 \end{pmatrix}.
$$

Antag nu i stället att vi ska transformera problemet (2.13) till formen (2.10). Då ska vi till skillnad från ovan inte baka in teckenkraven på x_1 och x_2 bland de övriga bivillkoren i $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$. Däremot behöver vi nu notera att en variabel som inte är teckenbegränsad (i detta fall x_3) alltid kan skrivas som differensen mellan två teckenbegränsade variabler.
Problemet (2.13) kan då skrivas på formen (2.10) med

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ -4 & -5 & -6 & 6 \\ 9 & 8 & 7 & -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -11 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -16 \\ -14 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix}.
$$

Antag slutligen att vi ska transformera problemet (2.13) till formen (2.12). Då behöver likhetsbivillkoret inte skrivas som dubbla olikheter. Däremot behöver vi nu notera att ett olikhetsbivillkor kan skrivas som ett likhetsbivillkor genom att man inför en extra teckenbegränsad variabel, oftast kallad *slackvariabel*, som betecknar antingen differensen mellan högerledet och vänsterledet, om olikhetsbivillkoret är av typen "$\leq$", eller differensen mellan vänsterledet och högerledet, om olikhetsbivillkoret är av typen "$\geq$".
Problemet (2.13) kan då skrivas på formen (2.12) med

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & -6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & -7 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -16 \\ -14 \\ 12 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Här är x_5 och x_6 slackvariabler.