Krister Svanberg, april 2012

1 Kvadratisk optimering under linjära likhetsbivillkor

I detta kapitel behandlas följande kvadratiska optimeringsproblem under linjära likhetsbivillkor:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} + c_0 \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Här är $\mathbf{A} \in I\!R^{m\times n}$ och $\mathbf{H} \in I\!R^{n\times n}$ givna matriser med $\mathbf{H}$ symmetrisk. Vidare är $\mathbf{b} \in I\!R^m$ och $\mathbf{c} \in I\!R^n$ givna vektorer, $c_0 \in I\!R$ en given konstant, medan $\mathbf{x} \in I\!R^n$ är variabelvektorn. Det tillåtna området ges här av $\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in I\!R^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$, och målfunktionen ges av $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} + c_0$.

Om ekvationssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ inte har någon lösning $\mathbf{x}$ (dvs $\mathbf{b} \notin \mathcal{R}(\mathbf{A})$) så är det tillåtna området tomt ($\mathcal{F} = \emptyset$) varvid optimeringsproblemet blir ointressant.
Om ekvationssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har exakt *en* lösning $\mathbf{x}$ så är denna lösning också den enda *optimala* lösningen till problemet (1.1), ty det finns ju ingen annan tillåten lösning som kan vara bättre! Även detta fall är ointressant (eller åtminstone trivialt) ur optimeringssynpunkt.
Det intressanta fallet är alltså när systemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har flera olika lösningar, varvid uppgiften består i att bestämma den (de) "bästa" av dessa, dvs den (de) som ger lägst värde på $f(\mathbf{x})$.
Att systemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har flera lösningar är ekvivalent med att $\mathbf{b} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$, dvs att $\mathbf{b}$ ligger i bildrummet till $\mathbf{A}$ och att nollrummet till $\mathbf{A}$ består av fler vektorer än bara nollvektorn. Detta är exempelvis uppfyllt om matrisen $\mathbf{A}$ har fler kolonner än rader, dvs $n > m$, och kolonnerna i $\mathbf{A}$ spänner upp $I\!R^m$, ty då har $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ dimensionen $n - m > 0$ medan $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = I\!R^m$ så att systemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har flera lösningar för varje högerledsvektor $\mathbf{b} \in I\!R^m$.

Vi förutsätter i resten av detta kapitel att $\mathbf{b} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$.

1.1 Representation av de tillåtna lösningarna mha en nollrumsmatris

Låt $\bar{\mathbf{x}} \in I\!R^n$ vara *en* av de tillåtna lösningarna till problemet, dvs $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$.
De tillåtna lösningarna $\mathbf{x}$ till problemet karakteriseras då av att $\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$,
ty $\mathbf{x} \in \mathcal{F} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$.
Låt vektorerna $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k$ utgöra en bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ (där k är dimensionen på detta nollrum) och låt $\mathbf{Z}$ vara en $n \times k$-matris med dessa basvektorer till kolonner, dvs $\mathbf{Z} = [\,\mathbf{z}_1 \cdots \mathbf{z}_k\,]$.
Då gäller att $\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ om och endast om $\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Z}\mathbf{v}$ för något $\mathbf{v} \in I\!R^k$,
vilket ger följande representation av de tillåtna lösningarna till problemet (1.1):

$$\mathbf{x} \in \mathcal{F} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z}\mathbf{v} \;\text{ för något } \mathbf{v} \in I\!R^k. \tag{1.2}$$

Observera här att mot varje $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ svarar ett *unikt* $\mathbf{v} \in I\!R^k$
(och mot varje $\mathbf{v} \in I\!R^k$ svarar förstås ett unikt $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$).

1.2 När är det betraktade problemet ett konvext problem?

Det tillåtna området $\mathcal{F}$ ovan är alltid konvext, ty antag att både $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ tillhör $\mathcal{F}$, dvs att $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$, och låt $\mathbf{w} = (1-t)\,\mathbf{x} + t\,\mathbf{y}$ där $t \in (0,1)$. Då gäller att $\mathbf{Aw} = (1-t)\,\mathbf{Ax} + t\,\mathbf{Ay} = (1-t)\,\mathbf{b} + t\,\mathbf{b} = \mathbf{b}$, vilket betyder att även $\mathbf{w}$ tillhör $\mathcal{F}$.

Det går också att explicit avgöra om målfunktionen är konvex eller inte på $\mathcal{F}$.

Lemma: Målfunktionen f, given av $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Hx} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} + c_0$, är konvex på det tillåtna området $\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in I\!R^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$ om och endast om matrisen $\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{HZ}$ är positivt semidefinit, där matrisen $\mathbf{Z}$ ges av avsnitt 1.1.

Bevis: Enligt definitionen är f en konvex funktion på $\mathcal{F}$ om och endast om $f(\mathbf{x} + t\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})) \leq f(\mathbf{x}) + t\,(f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}))$, för alla $t \in (0,1)$, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ och $\mathbf{y} \in \mathcal{F}$. Högerledet minus vänsterledet i denna olikhet ges av uttrycket $\frac{1}{2}\,t\,(1-t)(\mathbf{y}-\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{H}(\mathbf{y}-\mathbf{x})$. Detta uttryck är ≥ 0 för alla $t \in (0,1)$, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ och $\mathbf{y} \in \mathcal{F}$ om och endast om $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{Hz} \geq 0$ för alla $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$, dvs om och endast om $\mathbf{H}$ *är positivt semidefinit på nollrummet till* $\mathbf{A}$. Men att $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ är ekvivalent med att $\mathbf{z} = \mathbf{Zv}$ för något $\mathbf{v} \in I\!R^k$, så villkoret att $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{Hz} \geq 0$ för alla $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ är ekvivalent med att $(\mathbf{Zv})^\mathsf{T}\mathbf{H}(\mathbf{Zv}) \geq 0$ för alla $\mathbf{v} \in I\!R^k$, dvs att $\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{HZv} \geq 0$ för alla $\mathbf{v} \in I\!R^k$, dvs att $\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{HZ}$ är positivt semidefinit.

Ett tillräckligt (men inte nödvändigt) villkor för att $\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{HZ}$ ska vara positivt semidefinit är att $\mathbf{H}$ är positivt semidefinit, dvs att f är konvex på hela $I\!R^n$.
På motsvarande sätt som ovan (väsentligen genom att byta ≥ 0 mot > 0) visas att f är strikt konvex på $\mathcal{F}$ om och endast om $\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{HZ}$ är positivt definit.

Obs! I resten av detta kapitel förutsätter vi att problemet (1.1) är konvext, dvs att $\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{HZ}$ är positivt semidefinit, dvs att $\mathbf{H}$ är positivt semidefinit på nollrummet till $\mathbf{A}$.

1.3 Optimal lösning till problemet med en nollrumsmetod

Baserat på representationen i avsnitt 1.1 så kan man i problemet (1.1) ersätta variabelvektorn $\mathbf{x}$ med uttrycket $\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Zv}$, varvid bivillkoren $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ automatiskt blir uppfyllda på grund av ekvivalensen (1.2), medan målfunktionen övergår till följande kvadratiska funktion i den nya variabelvektorn $\mathbf{v} \in I\!R^k$:

$$f(\bar{\mathbf{x}}+\mathbf{Zv}) = f(\bar{\mathbf{x}})+(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}+\mathbf{c})^\mathsf{T}(\mathbf{Zv})+\tfrac{1}{2}(\mathbf{Zv})^\mathsf{T}\mathbf{H}(\mathbf{Zv}) = f(\bar{\mathbf{x}})+(\mathbf{Z}^\mathsf{T}(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}+\mathbf{c}))^\mathsf{T}\mathbf{v}+\tfrac{1}{2}\mathbf{v}^\mathsf{T}(\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{HZ})\mathbf{v}.$$

Problemet (1.1) är alltså ekvivalent med följande problem i $\mathbf{v} \in I\!R^k$ *utan* några bivillkor:

$$\begin{aligned} &\text{minimera} \quad \tfrac{1}{2}\mathbf{v}^\mathsf{T}(\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{HZ})\mathbf{v} + (\mathbf{Z}^\mathsf{T}(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c}))^\mathsf{T}\mathbf{v} + f(\bar{\mathbf{x}}) \\ &\text{då} \quad \mathbf{v} \in I\!R^k. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Eftersom $\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{HZ}$ är positivt semidefinit så följer att $\hat{\mathbf{v}} \in I\!R^k$ är en optimal lösning till problemet (1.3) om och endast om $(\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{HZ})\hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{Z}^\mathsf{T}(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})$. Därmed gäller att $\hat{\mathbf{x}} \in I\!R^n$ är en optimal lösning till det ursprungliga problemet (1.1) om och endast om

$$(\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{HZ})\hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{Z}^\mathsf{T}(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c}) \quad \text{och} \quad \hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z}\hat{\mathbf{v}}. \tag{1.4}$$

I specialfallet att $\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{HZ}$ är positivt definit (och inte bara positivt semidefinit) så har systemet $(\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{HZ})\mathbf{v} = -\mathbf{Z}^\mathsf{T}(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})$ en *unik* lösning $\hat{\mathbf{v}}$, varvid $\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z}\hat{\mathbf{v}}$ är den *unika* optimala lösningen till problemet (1.1).

1.4 Optimal lösning till problemet med en Lagrangemetod

Det finns ett annat sätt, som inte kräver någon nollrumsmatris $\mathbf{Z}$, att lösa problemet (1.1). I vissa fall (men inte alltid) leder detta till en effektivare metod än metoden i avsnitt 1.3.

Mängden av tillåtna avtaganderiktningar i en given punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ kan karakteriseras på ett enkelt och explicit sätt för (det konvexa) problemet (1.1).

Lemma: Vektorn $\mathbf{d} \in I\!R^n$ är en tillåten avtaganderiktning i $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ om och endast om $\mathbf{d} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ och $(\mathbf{Hx} + \mathbf{c})^{\mathsf{T}}\mathbf{d} < 0$.

Bevis: Antag först att $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$, $\mathbf{d} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ och $(\mathbf{Hx} + \mathbf{c})^{\mathsf{T}}\mathbf{d} < 0$.
Då gäller för varje $t \in I\!R$ att $\mathbf{A}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{d}) = \mathbf{Ax} + t\,\mathbf{Ad} = \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, så att $\mathbf{d}$ är en tillåten riktning i $\mathbf{x}$. Vidare gäller, enligt ett tidigare resultat, att $\mathbf{d}$ är en avtaganderiktning i $\mathbf{x}$. Alltså är $\mathbf{d}$ en tillåten avtaganderiktning i $\mathbf{x}$.
Antag nu att $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ men att $\mathbf{d} \notin \mathcal{N}(\mathbf{A})$. Då är $\mathbf{Ad} \neq \mathbf{0}$, och därmed gäller för alla $t \neq 0$ att $\mathbf{A}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{d}) = \mathbf{Ax} + t\,\mathbf{Ad} \neq \mathbf{b}$, vilket visar att $\mathbf{d}$ *inte* är en tillåten riktning i $\mathbf{x}$.
Antag slutligen att $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$, $\mathbf{d} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ men att $(\mathbf{Hx} + \mathbf{c})^{\mathsf{T}}\mathbf{d} \geq 0$.
Då erhålls att $f(\mathbf{x} + t\,\mathbf{d}) = f(\mathbf{x}) + t\,(\mathbf{Hx} + \mathbf{c})^{\mathsf{T}}\mathbf{d} + \frac{1}{2}\,t^2\,\mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{Hd} \geq f(\mathbf{x})$ för alla $t \geq 0$, ty $(\mathbf{Hx} + \mathbf{c})^{\mathsf{T}}\mathbf{d} \geq 0$ och $\mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{Hd} \geq 0$ (eftersom $\mathbf{H}$ är positivt semidefinit på $\mathcal{N}(\mathbf{A})$), vilket visar att $\mathbf{d}$ *inte* är en avtaganderiktning i punkten $\mathbf{x}$.

Lemma: En given punkt $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}$ är en optimal lösning till problemet (1.1) om och endast om $(\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c})^{\mathsf{T}}\mathbf{d} = 0$ för alla $\mathbf{d} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Bevis: En sats i ett tidigare avsnitt tillsammans med föregående lemma ger att en given punkt $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}$ är en optimal lösning till (1.1) om och endast om $(\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c})^{\mathsf{T}}\mathbf{d} \geq 0$ för alla $\mathbf{d} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$, vilket i sin tur är uppfyllt om och endast om $(\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c})^{\mathsf{T}}\mathbf{d} = 0$ för alla $\mathbf{d} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ (ty för varje $\mathbf{d} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ gäller att även $-\mathbf{d} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$).

Sats: Punkten $\hat{\mathbf{x}} \in I\!R^n$ är en optimal lösning till problemet (1.1) om och endast om $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ och det finns en vektor $\mathbf{u} \in I\!R^m$ sådan att $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}$.

Bevis: Enligt det senaste lemmat ovan är $\hat{\mathbf{x}} \in I\!R^n$ en optimal lösning om och endast om $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})^{\perp}$. Men $\mathcal{N}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$, varpå påståendet i satsen följer.

Satsen säger alltså att $\hat{\mathbf{x}} \in I\!R^n$ är en optimal lösning till (det konvexa) problemet (1.1) om och endast om $\hat{\mathbf{x}}$ utgör "$\mathbf{x}$-delen" av en lösning till följande ekvationssystem i $\mathbf{x}$ och $\mathbf{u}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

1.5 Sammanfattning av resultaten i detta kapitel

Betrakta det kvadratiska optimeringsproblemet

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} + c_0 \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Låt $\bar{\mathbf{x}}$ vara *en* av lösningarna till systemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och låt $\mathbf{Z}$ vara en matris vars kolonner utgör en bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. Antag att $\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{Z}$ är positivt semidefinit.

Då gäller att $\hat{\mathbf{x}}$ är en optimal lösning till problemet om och endast om

$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z}\hat{\mathbf{v}}$, där $\hat{\mathbf{v}}$ uppfyller $(\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{Z})\hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})$, vilket i sin tur är uppfyllt

om och endast om $\hat{\mathbf{x}}$ tillsammans med någon vektor $\hat{\mathbf{u}}$ utgör en lösning till systemet

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

1.6 Några blandade kommentarer

Att metoden i avsnitt 1.4 kallas för en Lagrangemetod beror på att ekvationssystemet (1.5) kan uppfattas som ett specialfall av de mer generella *Lagrangevillkoren* för ickelinjär optimering under likhetsbivillkor. Komponenterna i vektorn $\mathbf{u}$ kallas då *Lagrangemultiplikatorer.*

Vi har genomgående förutsatt att problemet är konvext, dvs att $\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{Z}$ är positivt semidefinit. Om detta inte skulle vara fallet så är målfunktionen i problemet (1.3) nedåt obegränsad och saknar minimalpunkt. Därmed gäller att även ursprungsproblemet (1.1) saknar optimal lösning (om $\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{Z}$ ej är positivt semidefinit).

Även om $\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{Z}$ är positivt semidefinit så är det inte säkert att det finns någon optimal lösning till problemet (1.3). Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för existens av (minst) en optimal lösning till (1.3), och därmed även till (1.1), är att ekvationssystemet $(\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{Z})\mathbf{v} = -\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})$ har (minst) en lösning, dvs att $-\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c}) \in \mathcal{R}(\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{Z})$, vilket är uppfyllt om och endast om $-\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{c} \in \mathcal{R}(\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H})$ (ty $\mathcal{R}(\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{Z}) = \mathcal{R}(\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H})$ och $-\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}(\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H})$).

Antag för enkelhets skull att raderna i matrisen $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende. Då är dimensionen på $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = k = n - m$, varvid ekvationssystemet $(\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{Z})\mathbf{v} = -\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})$ har storleken $(n - m) \times (n - m)$, medan ekvationssystemet (1.5) har storleken $(n + m) \times (n + m)$. Om exempelvis $n \approx 2m$ så är $n+m \approx 3(n-m)$, så att "Lagrangesystemet" har ungefär tre gånger så många ekvationer (och obekanta) som "nollrumssystemet". Om däremot $m \ll n$ så är de båda ekvationssystemen ungefär lika stora, och då kan en fördel med Lagrangesystemet vara att man inte behöver beräkna någon nollrumsmatris $\mathbf{Z}$. Vidare kan *gleshet* (dvs ett stort antal nollor) i $\mathbf{H}$ och $\mathbf{A}$ utnyttjas effektivare i Lagrangemetoden, eftersom $\mathbf{Z}$ typiskt är tät även om $\mathbf{A}$ är gles. Vilken av de bägge metoderna som är "bäst" är alltså problemberoende, och det är säkrast att behärska dem båda två!

2 Två exempel på QP - fackverk och resistansnätverk

I detta kapitel ger vi två exempel på kvadratiska optimeringsproblem som naturen löser (till synes utan några större svårigheter).

2.1 Analys av ett fackverk med hjälp av kvadratisk optimering

Givet är en 3-dimensionell fackverksstruktur bestående av 5 st noder och 4 st stänger.
De fem nodernas koordinater (i x-, y- och z-led) ges i tur och ordning av:
$(-1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$.

De fyra stängerna har samtliga längden $\sqrt{2}$ och de förbinder noderna enligt följande:
Stång 1 går mellan noderna 1 och 5, stång 2 går mellan noderna 2 och 5,
stång 3 går mellan noderna 3 och 5, och stång 4 går mellan noderna 4 och 5.
Noderna 1–4 är samtliga "fixerade" (fastskruvade i berg) så att de inte kan röra sig, medan nod 5 är "fri".

I nod 5 (den fria noden) appliceras nu en given yttre kraft $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^\mathsf{T}$.
Detta förorsakar normalkrafter f_1, f_2, f_3 och f_4 i de fyra stängerna,
där $f_j > 0$ betyder dragkraft medan $f_j < 0$ betyder tryckkraft.
Uppgiften går ut på att bestämma dessa normalkrafter.

Vi får följande tre villkor för kraftjämvikt i den enda icke-fixerade noden (dvs nod 5):
$p_x - f_1/\sqrt{2} + f_3/\sqrt{2} = 0,$ (kraftjämvikt i x-led)
$p_y - f_2/\sqrt{2} + f_4/\sqrt{2} = 0,$ (kraftjämvikt i y-led)
$p_z - f_1/\sqrt{2} - f_2/\sqrt{2} - f_3/\sqrt{2} - f_4/\sqrt{2} = 0,$ (kraftjämvikt i z-led).

Detta kan skrivas på formen $\mathbf{Rf} = \mathbf{p}$,

$$\text{där} \;\; \mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \;\; \mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^\mathsf{T} \text{ och } \; \mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)^\mathsf{T}.$$

Men detta ekvationssystem har oändligt många lösningar, så det räcker inte för att bestämma $\mathbf{f}$ entydigt. Vi måste också antaga att materialet i stängerna är linjärt elastiskt, så att det sker en (liten) deformation av strukturen då kraften $\mathbf{p}$ appliceras.
Antag därför att den fria noden förflyttas från $(0, 0, 1)$ till $(0, 0, 1)+(u_x, u_y, u_z)$,
där vektorn $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^\mathsf{T}$ kallas *förskjutningsvektorn* svarande mot lastvektorn $\mathbf{p}$.

Om komponenterna i vektorn $\mathbf{u}$ är "små" så ger en geometrisk betraktelse att de fyra stängernas längdändringar (elongations) e_j beror av $\mathbf{u}$ enligt formeln $e_j = \mathbf{r}_j^\mathsf{T}\mathbf{u}$, där

$\mathbf{r}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \, , \, 0 \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^\mathsf{T}$ (= en normerad riktningsvektor för stång 1),

$\mathbf{r}_2 = \left(0 \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}} \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^\mathsf{T}$ (= en normerad riktningsvektor för stång 2),

$\mathbf{r}_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \, , \, 0 \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^\mathsf{T}$ (= en normerad riktningsvektor för stång 3),

$\mathbf{r}_4 = \left(0 \, , \, \frac{-1}{\sqrt{2}} \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^\mathsf{T}$ (= en normerad riktningsvektor för stång 4).

Sambandet mellan stängernas längdändringar och den fria nodens förskjutning kan således skrivas på formen $\mathbf{e} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{u}$, där $\mathbf{e} = (e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_4)^\mathsf{T}$ och där $\mathbf{R}$ är samma matris som ovan!

Vi behöver ytterligare en uppsättning villkor, nämligen sambandet mellan längdändring och normalkraft för varje stång. Detta ges av Hookes lag som säger att $f_j = \dfrac{A_j E}{L_j} \cdot e_j$,
där A_j är tvärsnittsarean, L_j är stånglängden, och E är materialets elasticitetsmodul.

Detta kan skrivas $\mathbf{e} = \mathbf{D}\,\mathbf{f}$, där $\mathbf{D}$ är en diagonalmatris med diagonalelementen $d_j = \dfrac{L_j}{A_j E}$.

Sammanfattningsvis har vi följande samband: $\mathbf{R}\mathbf{f} = \mathbf{p}$, $\mathbf{e} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{u}$ och $\mathbf{e} = \mathbf{D}\,\mathbf{f}$.

Här kan vektorn $\mathbf{e}$ elimineras, varefter vi får följande ekvationssystem i $\mathbf{f}$ och $\mathbf{u}$:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{D}\,\mathbf{f} - \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{u} & = & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}\mathbf{f} & = & \mathbf{p} \end{array} \tag{2.1}$$

Eftersom matrisen $\mathbf{D}$ är positivt definit så är detta ekvationssystem ekvivalent med följande kvadratiska optimeringsproblem under linjära bivillkor, se avsnitt 1.4.

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \tfrac{1}{2}\,\mathbf{f}^\mathsf{T}\mathbf{D}\,\mathbf{f} \\ \text{då} & \mathbf{R}\mathbf{f} = \mathbf{p}. \end{array} \tag{2.2}$$

Bland alla vektorer $\mathbf{f}$ som uppfyller kraftjämviktsvillkoren $\mathbf{R}\mathbf{f} = \mathbf{p}$ så väljer alltså naturen den vektor $\mathbf{f}$ som minimerar den kvadratiska funktionen $\frac{1}{2}\,\mathbf{f}^\mathsf{T}\mathbf{D}\,\mathbf{f}$. Denna målfunktion kan tolkas som totala töjningsarbetet, ty $\mathbf{f}^\mathsf{T}\mathbf{D}\,\mathbf{f} = \sum_j d_j f_j^2 = \sum_j f_j e_j = \sum_j(\text{kraft} \cdot \text{väg})$.

Optimeringsproblemet (2.2) kan lösas på två sätt. Det första sättet består i att lösa (2.1).
Ur $\mathbf{D}\,\mathbf{f} - \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ erhålls att $\mathbf{f} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{u}$, som insatt i $\mathbf{R}\mathbf{f} = \mathbf{p}$ ger ekvationssystemet

$$\mathbf{R}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{p}. \tag{2.3}$$

Enligt ovan är $L_j = \sqrt{2}$ för alla j. För enkelhets skull antar vi fortsättningsvis att $A_j = 1$ för alla j och att $E = \sqrt{2}$, så att $\mathbf{D} = \mathbf{I} =$ enhetsmatrisen. Vidare antar vi att $\mathbf{p} = \sqrt{2}\cdot(4,\ 1,\ 6)^\mathsf{T}$.

Då är $\mathbf{R}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, så vi får att $\mathbf{u} = \sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, varefter $\mathbf{f} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Optimeringsproblemet (2.2) kan också lösas med nollrumsmetoden i avsnitt 1.3.
Genom att tillämpa Gauss-Jordans metod på ekvationssystemet $\mathbf{R}\mathbf{f} = \mathbf{p}$, eller enklare på systemet $\sqrt{2}\,\mathbf{R}\mathbf{f} = \sqrt{2}\,\mathbf{p}$, så erhålls efter några radoperationer att *en* tillåten lösning ges av $\bar{\mathbf{f}} = (9,\, 2,\, 1,\, 0)^\mathsf{T}$, medan en bas till $\mathcal{N}(\mathbf{R})$ ges av vektorn $\mathbf{z} = (-1,\ 1,\ -1,\ 1)^\mathsf{T}$.

Därefter bestäms skalären v ur ekvationen $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{D}\mathbf{z}\,v = -\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{D}\bar{\mathbf{f}}$, dvs $4v = 8$, dvs $v = 2$.

Slutligen erhålls den optimala lösningen till problemet (2.2) ur $\mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}} + 2\cdot\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2.2 Analys av ett resistansnätverk med hjälp av kvadratisk optimering

I detta avsnitt ska vi analysera ett givet resistansnätverk bestående av fem stycken *noder*, numrerade från 1 till 5, samt sju stycken *länkar* mellan vissa par av noderna.
En länk som förbinder noderna i och j, där $i < j$, betecknas (i, j).
Det nätverk vi ska analysera består av följande mängd av länkar:

$$\mathcal{L} = \{(1,2),\ (1,3),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,4),\ (3,5),\ (4,5)\}.$$

På varje länk $(i,j)\in\mathcal{L}$ sitter ett motstånd med en given resistans r_{ij} [Ohm].

2.2.1 Att skicka en ström genom nätverket

Antag att vi med hjälp av en yttre strömkälla skickar strömmen 1 [Ampere] genom nätverket, från noden 1 till noden 5. Detta förorsakar länkströmmar x_{ij} [Ampere] i de olika länkarna. Om strömmen i länk (i, j) går från nod i till nod j så är $x_{ij} > 0$, medan om strömmen i länk (i, j) går från nod j till nod i så är $x_{ij} < 0$.

Vi ska här visa att dessa länkströmmar kan erhållas som lösningen till ett visst kvadratiskt optimeringsproblem.

Till att börja med har vi följande fem villkor för strömbalanser i de olika noderna:

$$\begin{array}{rcll}
1 & = & x_{12} + x_{13} & \text{ström in till nod 1 = ström ut från nod 1} \\
x_{12} & = & x_{23} + x_{24} & \text{ström in till nod 2 = ström ut från nod 2} \\
x_{13} + x_{23} & = & x_{34} + x_{35} & \text{ström in till nod 3 = ström ut från nod 3} \\
x_{24} + x_{34} & = & x_{45} & \text{ström in till nod 4 = ström ut från nod 4} \\
x_{35} + x_{45} & = & 1 & \text{ström in till nod 5 = ström ut från nod 5}
\end{array}$$

Detta kan kortfattat skrivas $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, där $\mathbf{x} = (x_{12},\ x_{13},\ x_{23},\ x_{24},\ x_{34},\ x_{35},\ x_{45})^\mathsf{T}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Men detta ekvationssystem har oändligt många lösningar, så det räcker inte för att bestämma $\mathbf{x}$ entydigt. Vi måste också använda oss av Ohms lag som säger att spänningsfallet över ett motstånd ges av produkten av resistansen och strömmen genom motståndet.

Vi ansätter därför (obekanta) nodpotentialer u_i [Volt] i de olika noderna.
Spänningsfallet v_{ij} [Volt] på länken $(i,j)\in\mathcal{L}$ ges då av $v_{ij} = u_i - u_j$.
Detta kan skrivas $\mathbf{v} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}$, där $\mathbf{v} = (v_{12},\ v_{13},\ v_{23},\ v_{24},\ v_{34},\ v_{35},\ v_{45})^\mathsf{T}$,
$\mathbf{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5)^\mathsf{T}$, och där $\mathbf{A}$ är samma matris som ovan!

Vi behöver ytterligare en uppsättning villkor, nämligen det ovannämnda sambandet mellan spänningsfall och ström, dvs Ohms lag, som säger att $v_{ij} = r_{ij}x_{ij}$ för alla $(i,j)\in\mathcal{L}$.
Detta kan skrivas $\mathbf{v} = \mathbf{Dx}$, där $\mathbf{D}$ är en diagonalmatris med diagonalelementen $r_{ij}, (i,j)\in\mathcal{L}$.

Sammanfattningsvis har vi följande samband: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}$ och $\mathbf{v} = \mathbf{Dx}$.

Här kan vektorn $\mathbf{v}$ elimineras, varefter vi får följande ekvationssystem i $\mathbf{x}$ och $\mathbf{u}$:

$$\begin{array}{rcrcl} \mathbf{Dx} & - & \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} & = & \mathbf{0} \\ \mathbf{Ax} & & & = & \mathbf{b} \end{array} \tag{2.4}$$

Eftersom matrisen $\mathbf{D}$ är positivt definit så är detta ekvationssystem ekvivalent med följande kvadratiska optimeringsproblem under linjära bivillkor, se avsnitt 1.4.

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \tfrac{1}{2}\,\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Dx} \\ \text{då} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \end{array} \tag{2.5}$$

Bland alla vektorer $\mathbf{x}$ som uppfyller strömbalansvillkoren $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ så väljer alltså naturen den vektor $\mathbf{x}$ som minimerar den kvadratiska funktionen $\frac{1}{2}\,\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Dx}$. Denna målfunktion kan tolkas som (halva) totala effektförlusten, ty $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Dx} = \sum r_{ij}x_{ij}^2$.

Optimeringsproblemet (2.5) kan lösas på två sätt. Det första sättet består i att lösa (2.4). Ur $\mathbf{Dx} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ erhålls att $\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}$, som insatt i $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ger ekvationssystemet

$$\mathbf{AD}^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{b}. \tag{2.6}$$

För enkelhets skull antar vi fortsättningsvis att $r_{ij}=1$ för alla $(i,j)\in\mathcal{L}$, så att $\mathbf{D} = \mathbf{I}$.

Då blir $\mathbf{AD}^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Gauss-Jordans metod ger efter några radoperationer att lösningarna till $\mathbf{AD}^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ ges av $\mathbf{u} = (8/7,\ 5/7,\ 4/7,\ 3/7,\ 0)^\mathsf{T} + t\cdot(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)^\mathsf{T}$, där t är ett godtyckligt reellt tal. För samtliga dessa lösningar gäller att $\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = (3/7,\ 4/7,\ 1/7,\ 2/7,\ 1/7,\ 4/7,\ 3/7)^\mathsf{T}$. Länkströmmarna x_{ij} är alltså entydiga trots att inte nodpotentialerna u_i är det.

Optimeringsproblemet (2.5) kan också lösas med nollrumsmetoden i avsnitt 1.3. Gauss-Jordans metod på ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ger att *en* tillåten lösning ges av $\bar{\mathbf{x}} = (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)^\mathsf{T}$, medan en bas till underrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ ges av de tre vektorerna $\mathbf{z}_1 = (1,\ –1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^\mathsf{T}$, $\mathbf{z}_2 = (-1,\ 1,\ 0,\ –1,\ 1,\ 0,\ 0)^\mathsf{T}$ och $\mathbf{z}_3 = (1,\ –1,\ 0,\ 1,\ 0,\ –1,\ 1)^\mathsf{T}$. Låt matrisen $\mathbf{Z}$ ha dessa tre basvektorer till kolonner, dvs $\mathbf{Z} = \left[\ \mathbf{z}_1\ \ \mathbf{z}_2\ \ \mathbf{z}_3\ \right]$.

Därefter bestäms vektorn $\mathbf{v}$ ur ekvationssystemet $\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{DZ}\,\mathbf{v} = -\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{D}\bar{\mathbf{x}}$, där

$\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{DZ} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ och $-\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{D}\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1/7 \\ 1/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$.

Slutligen erhålls den optimala lösningen till problemet (2.5) ur

$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Zv} = (3/7,\ 4/7,\ 1/7,\ 2/7,\ 1/7,\ 4/7,\ 3/7)^\mathsf{T}$.

2.2.2 Att ansluta batterier på vissa länkar

Antag att vi, i stället för att ansluta en yttre strömkälla till nätverket, ansluter *batterier* på vissa länkar i nätverket. Om det är ett batteri på en länk (i, j) så är det kopplat i serie med det givna motståndet på länken. Den givna resistansen r_{ij} [Ohm] för länken antas då inkludera den inre resistansen i batteriet. Batteriet på länk (i, j) antas leverera den givna spänningen s_{ij} [Volt]. Om pluspolen på batteriet är riktad mot noden j så är $s_{ij} > 0$, medan om pluspolen är riktad mot noden i så är $s_{ij} < 0$. Om det inte har anslutits något batteri på länk (i, j) så är $s_{ij} = 0$.
Dessa batterier kommer typiskt att förorsakar länkströmmar x_{ij} [Ampere] i nätverket. Om strömmen i länk (i, j) går från nod i till nod j så är $x_{ij} > 0$, medan om strömmen i länk (i, j) går från nod j till nod i så är $x_{ij} < 0$. Vi ska här visa att dessa länkströmmar kan erhållas som lösningen till ett visst kvadratiskt optimeringsproblem.

Villkoren för strömbalanser i de fem noderna kan nu skrivas $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, där matrisen $\mathbf{A}$ är densamma som i föregående avsnitt.

Liksom tidigare ansätter vi nodpotentialer u_i [Volt] i de olika noderna.
Om vi inte har något batteri på länk (i, j) så gäller att $u_j = u_i - r_{ij}x_{ij}$ (Ohms lag).
Om vi har ett batteri på länk (i, j) så gäller i stället att $u_j = u_i + s_{ij} - r_{ij}x_{ij}$.
Detta kan skrivas $\mathbf{Dx} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{s}$, där $\mathbf{s} = (s_{12}, s_{13}, s_{23}, s_{24}, s_{34}, s_{35}, s_{45})^\mathsf{T}$,
och där alltså $s_{ij} = 0$ om det inte finns något batteri på länk (i, j).

Vi har nu sambanden $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{Dx} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{s}$, dvs följande ekvationssystem i $\mathbf{x}$ och $\mathbf{u}$:

$$\begin{array}{lcrcl} \mathbf{Dx} & - & \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} & = & \mathbf{s} \\ \mathbf{Ax} & & & = & \mathbf{0} \end{array} \tag{2.7}$$

Eftersom matrisen $\mathbf{D}$ är positivt definit så är detta ekvationssystem ekvivalent med följande kvadratiska optimeringsproblem under linjära bivillkor, se avsnitt 1.4.

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Dx} - \mathbf{s}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} & \mathbf{Ax} = \mathbf{0}. \end{array} \tag{2.8}$$

Bland alla vektorer $\mathbf{x}$ som uppfyller strömbalansvillkoren $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ så väljer alltså naturen den vektor $\mathbf{x}$ som minimerar den kvadratiska funktionen $\frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Dx} - \mathbf{s}^\mathsf{T}\mathbf{x}$.

Optimeringsproblemet (2.8) kan lösas på två sätt. Det första sättet består i att lösa (2.7).
Ur $\mathbf{Dx} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{s}$ erhålls att $\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} + \mathbf{s})$, som insatt i $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ger ekvationssystemet

$$\mathbf{AD}^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = -\mathbf{AD}^{-1}\mathbf{s}. \tag{2.9}$$

För enkelhets skull antar vi fortsättningsvis att $r_{ij} = 1$ för alla $(i, j) \in \mathcal{L}$, så att $\mathbf{D} = \mathbf{I}$,
och att $s_{ij} = 1$ för alla $(i, j) \in \mathcal{L}$, så att $\mathbf{s} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^\mathsf{T}$.

$$\text{Då blir } \mathbf{AD}^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } -\mathbf{AD}^{-1}\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Gauss-Jordans metod ger efter några radoperationer att lösningarna till $\mathbf{AD}^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ ges av $\mathbf{u} = (-18/7, -13/7, -9/7, -5/7,\ 0)^{\mathsf{T}} + t \cdot (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)^{\mathsf{T}}$, där t är ett godtyckligt tal. För samtliga dessa $\mathbf{u}$ gäller att $\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}+\mathbf{s}) = (2/7, -2/7,\ 3/7, -1/7,\ 3/7, -2/7,\ 2/7)^{\mathsf{T}}$. Länkströmmarna x_{ij} är alltså entydiga trots att inte nodpotentialerna u_i är det.

Optimeringsproblemet (2.8) kan också lösas med nollrumsmetoden i avsnitt 1.3. Gauss-Jordans metod på ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ger att *en* tillåten lösning ges av $\bar{\mathbf{x}} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathsf{T}}$, medan en bas till underrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ ges av de tre vektorerna $\mathbf{z}_1 = (1,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{z}_2 = (-1,\ 1,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0)^{\mathsf{T}}$ och $\mathbf{z}_3 = (1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 1)^{\mathsf{T}}$. Låt matrisen $\mathbf{Z}$ ha dessa tre basvektorer till kolonner, dvs $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_3 \end{bmatrix}$.

Därefter bestäms vektorn $\mathbf{v}$ ur ekvationssystemet $\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{DZ}\,\mathbf{v} = -\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}(\mathbf{D}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{s})$, där

$$\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{DZ} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \text{ och } -\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}(\mathbf{D}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{s}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 3/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}.$$

Slutligen erhålls den optimala lösningen till problemet (2.8) ur

$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Zv} = (2/7, -2/7,\ 3/7, -1/7,\ 3/7, -2/7,\ 2/7)^{\mathsf{T}}$.

2.2.3 Att ansluta både strömkällor och spänningskällor

Det är enkelt att kombinera resultaten i de bägge föregående avsnitten, så att man kan beräkna länkströmmarna i nätverket när man anslutit såväl strömkällor mellan vissa noder som spänningskällor (batterier) på vissa länkar.

Det resulterande optimeringsproblemet bli på formen

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \tfrac{1}{2}\,\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{Dx} - \mathbf{s}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{då} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \end{array} \tag{2.10}$$

där vektorn $\mathbf{b}$ definierar strömkällornas placering och strömstyrka, medan vektorn $\mathbf{s}$ definierar batteriernas spänningar. Bland alla vektorer $\mathbf{x}$ som uppfyller strömbalansvillkoren $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ så väljer alltså naturen den vektor $\mathbf{x}$ som minimerar den kvadratiska funktionen $\tfrac{1}{2}\,\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{Dx} - \mathbf{s}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$.

Ett sätt att lösa detta optimeringsproblem (2.10) är att lösa motsvarande ekvationssystem

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Dx} & - & \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} & = & \mathbf{s} \\ \mathbf{Ax} & & & = & \mathbf{b} \end{array} \tag{2.11}$$

Antag att $\mathbf{x}^{(1)}$ är en optimal lösning till problemet (2.5) och att $\mathbf{x}^{(2)}$ är en optimal lösning till problemet (2.8). Då finns det dels en vektor $\mathbf{u}^{(1)}$ som tillsammans med $\mathbf{x}^{(1)}$ uppfyller (2.4), dels en vektor $\mathbf{u}^{(2)}$ som tillsammans med $\mathbf{x}^{(2)}$ uppfyller (2.7). Låt nu $\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}$ och $\mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)}$. Då uppfyller $\mathbf{x}^{(3)}$ och $\mathbf{u}^{(3)}$ (2.11), vilket innebär att $\mathbf{x}^{(3)}$ är en optimal lösning till problemet (2.10).