Michael Björklund

# JORDANDEKOMPOSITION

1/10-2002

Tillägg till Diff/trans K, frivilligt extramaterial ht-2002.

Givet $n \times n$-matris $A$:

Karakteristiskt polynom $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$,

($k$ distinkta egenvärden med multiplicitet $m_i$, $i = 1, \dots, k$)

1. Beräkna egenvärdena $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ från $p_A(\lambda) = 0$

2. Bestäm $u_i \in \mathbb{R}^n$: $(A - \lambda_i I)^{m_i} u_i = 0$, och $(A - \lambda_i I)^{m_i - 1} u_i \neq 0$, $i = 1, \dots, k$
(generaliserade egenvektorer)

3. Fixera $u_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$ och bilda:

$$\begin{cases} v_1 = u_i \\ v_2 = (A - \lambda_i I) u_i \\ \vdots \\ v_{m_i - 1} = (A - \lambda_i I)^{m_i - 1} u_i \end{cases} \qquad (\text{linj. oberoende } v_1, \dots, v_{m_i - 1})$$

∴ Inför ny bas $\{w_j\}_{j=1}^{m_i - 1}$ enl. $w_j = v_{m_i - j}$

4. Upprepa detta för alla $i = 1, \dots, k$, erhåll baser $\{w_{ij}\}_{i=1, j=1}^{k, \; m_i}$

5. Bilda $T = [w_{11}, \dots, w_{1m_1}, w_{21}, \dots, w_{2m_2}, \dots, w_{k1}, \dots, w_{km_k}]$

6. Basbytet $x = Tz$, överför $A$ till $J = T^{-1} A T$, där

$$J = \begin{bmatrix} \tilde{J}_1 & & & 0 \\ & \tilde{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{J}_k \end{bmatrix}, \quad \text{där } \tilde{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad \text{format: } m_i \times m_i$$

Denna struktur är enklare att handskas med!

**ex.**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$$

1. $\lambda_1 = 1$, $m_1 = 2$

2. $(A - \lambda_1 I)^{m_1} u_1 = (A - I)^2 u_1 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix}$

Välj t.ex $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $(A - \lambda_1 I) u_1 \neq 0$

3. $v_1 = u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = (A - \lambda_1 I) v_1 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$w_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. Finns bara ett egenvärde, klart!

5. $T = [\omega_1 \ \omega_2] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $T^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

6. $$J = T^{-1}AT = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vilket är på jordanform!

---

Exempel: anknytning till kursen:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x$$

Basbyte $x = Tz = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} z$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = T\dot{z} = ATz \quad \Leftrightarrow \quad \dot{z} = T^{-1}ATz = Jz$$

Lös således istället:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = z_1 + z_2 & \Rightarrow \dot{z}_1 = z + c_2e^t \\ \dot{z}_2 = z_2 & \Rightarrow z_2 = c_2e^t \end{cases}$$

$$\dot{z}_1 = z + c_2e^t \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(z_1e^{-t}) = c_2e^te^{-t} = c_2$$

$$\Leftrightarrow z_1e^{-t} = c_1 + c_2t \Leftrightarrow z_1 = c_1e^t + c_2te^t$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^t + c_2te^t \\ c_2e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

x erhålls slutligen genom

$$x = Tz = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^t & (1-2t)e^t \\ 2e^t & 2te^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2c_1 + (1-2t)c_2 \\ 2c_1 + 2tc_2 \end{bmatrix} e^t = c_1\underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektor}} e^t + \underbrace{c_2\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{generaliserad egenvektor}} e^t + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} te^t\right)}$$

(Denna lösningsformel används i Z1110 Cullen