KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamen i 5B1574 Portföljteori och riskvärdering
Måndagen den 15 januari 2007 kl. 8.00–13.00
Med reservation för tryckfel, slarvfel och andra misstag.

---

1. För huvuddelen av denna uppgift se boken.

2. Enligt CAPM så är $\bar{r}_i = r_f + c \cdot \sigma_{iM}$, där c är någon konstant $(= (\bar{r}_M - r_f)/\sigma_M^2)$. Värdepapper i's kovarians med marknaden $\sigma_{iM} = Cov(r_i, \sum_{j=1}^{3} \alpha_j r_j) = i$:te komponenten av $C\alpha$. Vi får då

$$\begin{aligned}
\bar{r}_1 &= r_f + c \cdot (2 \cdot 0.20 + 1 \cdot 0.4 + 1/2 \cdot 0.4) \\
\bar{r}_2 &= r_f + c \cdot (1 \cdot 0.20 + 4 \cdot 0.4 + 1/4 \cdot 0.4) \\
\bar{r}_3 &= r_f + c \cdot (1/2 \cdot 0.20 + 1/4 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.4)
\end{aligned}$$

Insättning av $\bar{r}_1 = 6$ och $r_f = 5$ ger först $c = 1$ och därefter $\bar{r}_2 = 6.9\%$ och $\bar{r}_3 = 5.6\%$.

3. Vi löser $P = Cd$,

$$\begin{pmatrix} 104.75 \\ 107.42 \\ 96.15 \\ 97.50 \\ 71.63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 110 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 105 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 106 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix}$$

Vilket ger

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9523 \\ 0.8900 \\ 0.8280 \\ 0.7687 \\ 0.7163 \end{pmatrix}.$$

Eftersom diskonteringsfaktorerna är positiva är marknaden arbitragefri. Den är komplett eftersom de är unika.

4. Vi observerar att "inverse floater"- obligationen kan ses som en linjär kombination av 4% och 6% obligationerna minus en "floating rate" obligation. "Floating rate" obligationen har ju priset givet av det nominella beloppet.

Vi måste se till att det nominella beloppet och de årliga betalningarna stämmer överens med de önskade. Låt x respektive y vara antalet som vi köper av 4% respektive 6% obligationen. Vi får då $x + y - 1 = 1$ (nominella beloppet) och $4x + 6y = 10$ (årliga), vilket ger $x = 1$ och $y = 1$.

(a) Priset på obligationen blir alltså $700 + 1150 - 1000 = 850$ kronor.

(b) Låt P_4 och D_4 beteckna pris och (kvasi-modifierade) duration för 4 procentaren och definiera motsvarande för 6 procentaren. Priset som funktion av λ kan skrivas som

$$P(\lambda) = P_4(\lambda) + P_6(\lambda) - \frac{1000(1 + r_1)}{1 + r_1 + \lambda},$$

där vi antagit att r_1 är fixerat, dvs obligationen har sålts "första gången" och nu betraktar vi den strax efter det. Då gäller eftersom

$$\frac{dP_4}{d\lambda} = -P_4 D_4$$

att

$$\begin{aligned} \frac{1}{P}\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} &= -\frac{P_4D_4 + P_6D_6}{850} + \frac{1000}{850(1 + r_1)} \\ &= -26.65 + \frac{1.18}{1 + r_1}. \end{aligned}$$

5. (a) $\log(x)$ är konkav. Tage är därför riskaversiv.

(b) Låt α vara det antal miljoner som Tage investerar i projektet. Tage skall då lösa problemet

$$\max 0.8 \log(1 - \alpha) + 0.2 \log(1 + 10\alpha).$$

Detta har lösningen $\alpha = 0.12$.

(c) Tage kan återskapa försäkringsbolagets erbjudande genom att investera x i projektet och spara y. Om han väljer x och y så att $y = d_2$ och $10x + y = d_1$, (dvs $x = (d_1 - d_2)/10$ får han samma effekt som om han tar försäkringsbolagets erbjudande. Detta kostar honom $x + y = d_1/10 + 9d_2/10$ vilket alltså är det "rimliga" priset.