KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamen i SF2974 Portföljteori och riskvärdering
Måndagen den 14 januari 2008 kl. 8.00–13.00
Med reservation för tryckfel, slarvfel och andra misstag.

1. En portfölj som inte kostar något och inte har någon risk förknippad med sig kan inte ha någon avkastning. Det betyder att om $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$ betecknar investeringen i de olika värdepapprena att $e^T x = \sum_{i=1}^n x_i = 0$ (kostar inget) och

$$B^T x = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n b_{i1} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n b_{im} x_i \end{bmatrix} = 0 \quad \text{(ingen risk)},$$

medför att $\bar{r}^T x = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i x_i = 0$ (ingen avkastning). Låt nu

$$A = \begin{bmatrix} e^T \\ B^T \end{bmatrix}$$

och använd lemmat. Det säger alltså att det finns $y = (y_0, y_1, \ldots, y_m)^T$ sådan att

$$\bar{r} = [e\ B]y = \begin{bmatrix} y_0 + \sum_{j=1}^m b_{1j} y_j \\ \vdots \\ y_o + \sum_{j=1}^m b_{nj} y_j \end{bmatrix}.$$

Identifiera nu y_0 med λ_0 och y_i med λ_i.

2. (a) Priset på respektive obligation fås genom att beräkna $P_i = \sum_t d_t c_{it}$ där d_t är diskonteringsfaktor och c_{it} är utbetalning. Vi får $P_1 = 103.10$ och $P_2 = 100.28$. Från diskonteringsfaktorerna får vi spoträntorna ur $d_t = 1/(1+s_t)^t$. Vi får $s_1 = 4.89\%$, $s_2 = 5.34\%$, $s_3 = 5.66\%$, $s_4 = 6.03\%$, $s_5 = 5.97\%$. Durationerna fås nu från uttrycket

$$D_i = \frac{\sum_t t c_{it}/(1+s_t)^(t+1)}{P_i} = \frac{\sum_t t c_{it} d_t/(1+s_t)}{P_i}$$

Insatta siffror ger $D_1 = 1.84$ och $D_2 = 4.21$.

(b) En enkel linjärprogrammeringsmodell ges av

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Minimera} & 103.10x_1 + 100.28x_2 + y_0 & & \\
\text{då} & 7x_1 + 6x_2 + y_0 & = & 10 + y_1 \\
 & 107x_1 + 6x_2 + y_1 & = & 20 + y_2 \\
 & 6x_2 + y_2 & = & 50 + y_3 \\
 & 6x_2 + y_3 & = & 50 + y_4 \\
 & 106x_2 + y_4 & = & 50 \\
 & x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 & \geq & 0
\end{array}$$

3. (a) $u'(w) = 1/(1+w)$ och $u''(w) = -1/(1+w)^2 < 0$, dvs personenen är riskaversiv.

(b) Nyttan av alterativ A är $u(A) = 1/5 \cdot \log(1 + 0.5) + 1/2 \cdot \log(1 + 1) + 3/10 \cdot \log(1 + 2) = 0.7573$. Nyttan av alternativ B är $u(B) = 1/4 \cdot \log(1 + 0.75) + 1/2 \cdot \log(1 + 1) + 1/4 \cdot \log(1 + 1.5) = 0.7156$. Eftersom $u(A) > u(B)$ föredrar personen alternativ A.

(c) Vi skall lösa $\log(1 + w) = 0.7573$. Vi får $w = 1.1324$.

4. De möjliga resultaten är 0-0, 1-1, 1-0, 2-0, 2-1, 0-1, 0-2, 1-2. Låt dessa resultat vara betecknade 1 till 8. Låt spelen vara numrerade 1 till 5 (i samma ordning som de är givna i tabellen). Definiera spel 6 som att vi inte spelar alls utan behåller vår hundralapp. Vi får följande utbetalningsmatris

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 600 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 600 & 0 & 0 & 100 \\ 200 & 0 & 0 & 150 & 0 & 100 \\ 200 & 0 & 0 & 0 & 350 & 100 \\ 200 & 0 & 0 & 150 & 0 & 100 \\ 0 & 300 & 0 & 150 & 0 & 100 \\ 0 & 300 & 0 & 0 & 350 & 100 \\ 0 & 300 & 0 & 150 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Kolumnerna svarar mot de 6 spelen och raderna mot de 8 resultaten. Enligt sats från boken (och utdelat material) är marknaden arbitragefri om och endast om det existerar en vektor $\psi > 0$ sådan att $\pi = (100, 100, 100, 100, 100, 100)^T = C^T\psi$. Vi får ett ekvationssystem

$$\begin{aligned} \psi_3 + \psi_4 + \psi_5 &= 1/2 && (1) \\ \psi_6 + \psi_7 + \psi_8 &= 1/3 && (2) \\ \psi_1 + \psi_2 &= 1/6 && (3) \\ \psi_3 + \psi_5 + \psi_6 + \psi_8 &= 2/3 && (4) \\ \psi_4 + \psi_7 &= 2/7 && (5) \\ \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4\psi_5 + \psi_6 + \psi_7 + \psi_8 &= 1 && (6) \\ & && (7) \end{aligned}$$

Det är lätt att se att detta ekvationssystem inte har någon lösning. Lägg i hop de två första ekvationerna och ekvation nummer 4 och 5. Alltså finns arbitragemöjligheter. En sådan arbitragemöjlighet är följande satsa 60 kr på att Khan vinner och 40 kronor på att Ludovice vinner. Ta samtidigt emot 30 kr på att någon vinner med 2-0 och 70 kronor på att någon vinner på någon vinner med 1 poäng. Detta kostar inget idag, men om det inte blir oavgjort kommer går man med vinst om 15 kr.

5. Kovariansmatrisen ges av elementen $C_{ii} = \sigma_i^2$ och $C_{ij} = 0.09\sigma_i\sigma_j$ om $i \neq j$. Låt σ beteckna kolumnvektorn med σ_i på plats i och $\text{diag}(x)$ är en kvadratisk matris med

x på diagonalen. Vi får då att $C = 0.91\,\mathrm{diag}(\sigma. * \sigma) + (0.3\sigma)(0.3\sigma)^T = A + vv^T$, där vi använt $.*$ för att beteckna komponentvis multiplikation på matlab-vis.

Vi löser först $Au = v$. Detta ger $u = (0.03297, 0.02747, 0.03297, 0.02747, 0.02747)^T$.

(a) För att lösa optimeringsproblemet (min-variansproblemet)

$$\begin{array}{ll} \text{minimera} & \frac{1}{2}w^T C w \\ \text{då} & e^T w = 1 \end{array} \tag{8}$$

skall vi lösa systemet

$$\begin{array}{rcl} Cw & = & \lambda e \\ e^T w & = & 1. \end{array} \tag{9}$$

Vi löser (9) genom att först lösa $C\hat{w} = e$ och sedan skala resultatet. Vi får

$$\hat{w} = A^{-1}e - u(u^T e)/(1 + v^T u) \tag{10}$$

$$= (0.0077165, 0.0049042, 0.0077165, 0.0049042, 0.0049042)^T. \tag{11}$$

Efter skalning får vi $w = (0.255975, 0.162683, 0.255975, 0.162683, 0.162683)^T$.

(b) För att lösa optimeringsproblemet

$$\begin{array}{ll} \text{minimera} & \frac{1}{2}w^T C w \\ & \bar{r}^T w + w_0 = r^* \\ \text{då} & e^T w = 1 \end{array} \tag{12}$$

skall vi lösa systemet

$$\begin{array}{rcl} Cw & = & \lambda e + \mu \bar{r} \\ r_f \mu + \lambda & = & 0 \\ \bar{r}^T w + w_0 r_f & = & r^* \\ e^T w + w_0 & = & 1 \end{array} \tag{13}$$

Vi får att vi skall lösa $C\hat{w} = (\bar{r} - r_f e)$ och sedan skala resultatet. Med samma teknik som i a)-uppgiften får vi

$$\hat{w} = (0.029897, 0.034071, 0.007919, 0.034071, 0.018808)^T.$$

som efter skalning ger $w = (0.23962, 0.27308, 0.06347, 0.27308, 0.15075)^T$.