KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamen i SF2974 Portföljteori och riskvärdering
Måndagen den 22 oktober 2007 kl. 14.00–19.00
Med reservation för tryckfel, slarvfel och andra misstag.

---

1. (a) Vi gör avläsningen i grafen $s_1 = 0.04455$ och $s_2 = 0.051$. Priset ges av

$$P = e^{-s_1 \cdot 1} 4 + e^{-s_2 \cdot 2} 104 = 97.74.$$

(b) Den relativa priskänsligheten ges av $\frac{dP/P}{d\lambda} = -\frac{e^{-s_1 \cdot 1} 4 + 2 \cdot e^{-s_2 \cdot 2} 104}{P} = -0.0283.$

(c) Terminspriset P uttryckt i miljoner kronor löser $-e^{-s_{0.25} \cdot 0.25} P + e^{-s_{0.75} \cdot 0.75} 1 = 0$. Vi läser av $s_{0.25} = 0.0352$ och $s_{0.75} = 0.0428$. Vi får $P = 976969$ kronor.

(d) Värdet av en sådan position som funktion av ett skift i nollkupongskurvan är $V(\lambda) = -e^{-(s_{0.25}+\lambda) \cdot 0.25} 976969 + e^{-(s_{0.75}+\lambda) \cdot 0.75} 1000000$. Vi får

$$\left. \frac{dV}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = +0.25 e^{-s_{0.25} \cdot 0.25} 976969 - 0.75 e^{-s_{0.75} \cdot 0.75} 1000000 = -211835$$

2. (a) $\bar{r}_A = 4 + 6 \cdot 0.7 - 8 \cdot (-0.5) = 12.2.$

(b) $\sigma_A = \sqrt{0.7^2 \cdot 10^2 + 0.5^2 \cdot 10^2 + 0.8^2 \cdot 10^2} = \sqrt{138} \approx 11.75$

(c) $r_A = 12.2 + 0.7 \cdot (10 - 5) - 0.5 \cdot (2 - 2) - 0.8 \cdot (10 - 7) = 12.5$

(d) En naturlig och möjlig tolkning av uppgiften ger 5%-VaR $= -12.2 + 1.645 \cdot 11.75 = 7.12875\%$. Om man använder kursmaterialets definition får man i stället följande. Låt X beteckna dagens förmögenhet. Denna investeras i A och då erhålls $Y = (1 + r_A)X$ där $r_A \in N(0.122, 0.1175)$, dvs $Y \in N(1.122X, 0.1175X)$. 5-%-VaR löser då $P(Y \leq -5\%\text{-VaR}) = 0.05$. Vi får då 5%-VaR $= -1.122X + 1.645 \cdot 0.1175X = -0.9287X$.

3. Se boken.

4. (a) $u'(w) = 1 + 0.5/w^{1/2}$ och $u''(w) = -0.25 w^{-3/2} <= 0$, dvs personenen är riskaversiv.

(b) Nyttan av alterativ A är $u(A) = 1/6 \cdot (0.5 + 0.5^{1/2}) + 1/2 \cdot (1 + 1^{1/2}) + 1/3 \cdot (2 + 2^{1/2}) = 2.339$. Nyttan av alternativ B är $u(B) = 1/4 \cdot (0.75 + 0.75^{1/2}) + 1/2 \cdot (1 + 1^{1/2}) + 1/4 \cdot (1.5 + 1.5^{1/2}) = 2.085$. Eftersom $u(A) > u(B)$ föredrar personen alternativ A.

(c) Vi skall lösa $w + \sqrt{w} = 2.339$. Sätt $a = \sqrt{w}$ och lös andragradsekvationen $a^2 + a = 2.339$. Detta ger $a = -0.5 + \sqrt{2.339 + 0.25} = 1.10911$ vilket ger $w = 1.23$.

5. Om vi skriver $r_i = r_f + \beta_i(r_M - r_f) + e_i$ får vi $\mathrm{cov}(r_i, r_j) = \beta_i\beta_j\sigma_M^2 + \mathrm{cov}(e_i, e_j)$. Vi antar nu i enlighet med den förtydling som gavs under tentamen att $\mathrm{cov}(e_i, e_j) = 0$ om $i \neq j$ och $\mathrm{cov}(e_i, e_i) = \sigma_{e_i}^2$. Kovariansmatrisen kan då skrivas

$$C = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 10 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} (8\ 15\ 10\ 12\ 9) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Vi använder ledningen för att ta fram inversen:

$$C^{-1} = -\frac{1}{360} \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 5/2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} (8\ 15\ 5/2\ 3\ 1) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(a) För att lösa optimeringsproblemet (min-variansproblemet)

$$\begin{array}{ll} \text{minimera} & \frac{1}{2}w^T C w \\ \text{då} & e^T w = 1 \end{array} \tag{3}$$

skall vi lösa systemet

$$\begin{array}{rcl} Cw & = & \lambda e \\ e^T w & = & 1. \end{array} \tag{4}$$

Vi löser (4) genom att först lösa $C\hat{w} = e$ och sedan skala resultatet. Vi får

$$\hat{w} = C^{-1}e = -\frac{29.5}{360} \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 5/2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/9 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$e^T\hat{w} = -\frac{29.5^2}{360} + \frac{47}{18} = \frac{279}{1440}$. Vi får alltså att

$$w = -\frac{29.5}{360}\frac{1440}{279} \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 5/2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1440}{279} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.777 \\ -1.182 \\ 0.233 \\ 0.021 \\ 0.151 \end{pmatrix}$$

och $\lambda = \frac{279}{1440}$ löser (4).

(b) För att lösa optimeringsproblemet

$$\begin{array}{ll} \text{minimera} & \frac{1}{2}w^T C w \\ & \bar{r}^T w + w_0 = r^* \\ \text{då} & e^T w = 1 \end{array} \tag{6}$$

skall vi lösa systemet

$$
\begin{aligned}
Cw &= \lambda e + \mu \bar{r} \\
r_f \mu + \lambda &= 0 \\
\bar{r}^T w + w_0 r_f &= r^* \\
e^T w + w_0 &= 1
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Vi får att vi skall lösa $C\hat{w} = (\bar{r} - r_f e)$ och sedan skala resultatet. Med samma teknik som i a)-uppgiften får vi

$$
\hat{w} = \begin{pmatrix} 1/45 \\ 1/24 \\ 1/144 \\ 1/120 \\ 1/360 \end{pmatrix}
\tag{8}
$$

som efter skalning ger

$$
w = \begin{pmatrix} 16/59 \\ 30/59 \\ 5/59 \\ 6/59 \\ 2/59 \end{pmatrix}
\tag{9}
$$