KTH Matematik

Tentamen i SF2974 Portföljteori och riskvärdering
Måndagen den 22 oktober, 2007, klockan 14.00 – 19.00

Examinator: Ulf Brännlund, telefon 790 73 20.

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare tillhandahållen från institutionen.

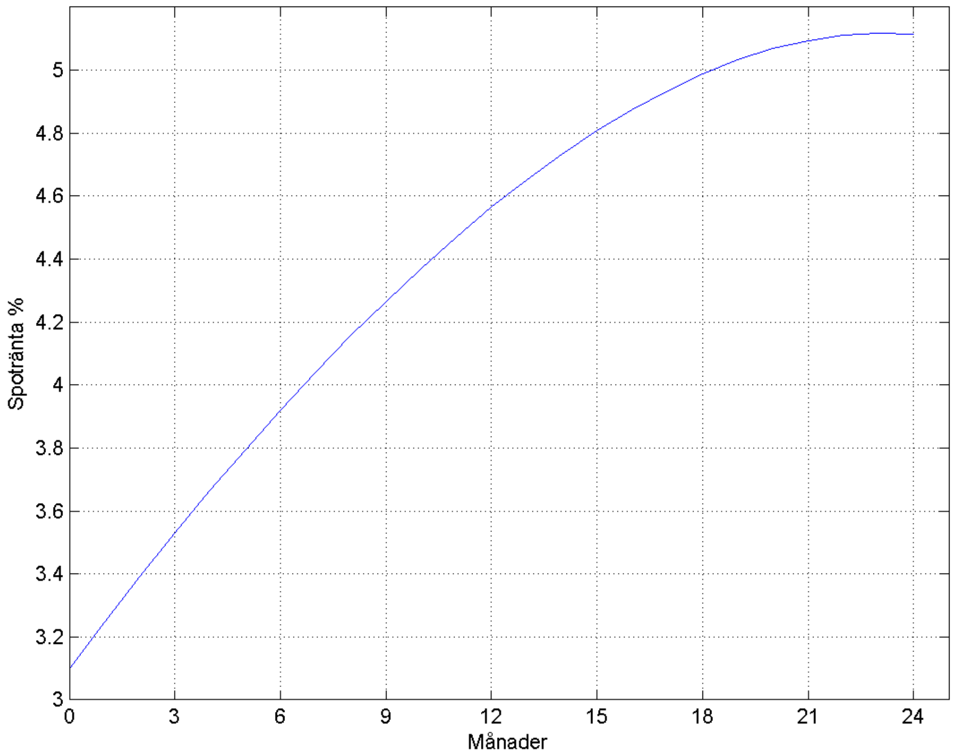
Lösningsmetoder: Motivera dina lösningar noggrannt. Om du anänder metoder som inte blivit utlärda i denna kurs måste du motivera mycket tydligt och noggrannt.

Obs! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

Totalt kan 50 poäng erhållas. Därtill kan du få 4 poäng från hemtalen. Totalt 24 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Använd grafen i figur 1 över nollkupongsräntorna på statspapper. Var noga med att ange vilken avläsning du gör, när du läser av grafen.



Figur 1: Nollkupongsräntor uttryckta i procent årlig avkastning. Konventionen är kontinuerligt sammansatt ränta.

(a) Vilket pris har en 2 årig statsobligation med 4 %-kupong (årlig) uttryckt i procent av nominella beloppet. ....(2p)

(b) Beräkna genom att använda formlerna för Fisher-Weil duration ovanstående obligations relativa priskänslighet för (små) skift av nollkupongskurvan. . (3p)

(c) Vilket är terminspriset för en 6 månaders statsskuldväxel om nominellt belopp 1 miljon kronor med leverans om 3 månader. ....(2p)

(d) Antag att du är lång en sådan position som i c-uppgiften. Hur förändras värdet (marginellt) av denna position i absoluta tal, när nollkupongskurvan skiftar uppåt? ....(3p)

2. Antag att en APT-modell med tre faktorer beskriver avkastningarna på väldiversifierade portföljer av värdepapper, och att dessa tre faktorer är förändringar av produktiviteten (f_1), inflationen (f_2), respektive förändringar av oljepriset (f_3). Antag vidare att

- under nästa år så förväntar sig marknaden att produktiviteten ökar med 5%, att inflationen blir 2% och att oljepriset ökar med 7%,
- att priserna på alla väldiversifierade portföljer sätts så att deras förväntade avkastningar nästa år ges av

$$E(r_i) = 4 + 6b_{i,1} - 8b_{i,2},$$

där $b_{i,k}$ betecknar portfölj is faktorvikt ("factor loading") för den $k$te faktorn. Observera att koefficienten framför $b_{i,3}$ är noll i denna ekvation.

- Marknaden tror att standardavvikelserna för faktorerna f_1, f_2, respektive f_3 för nästa år alla är 10%, och att de tre faktorerna är okorrellerade.
- Avkastningen på en portfölj A över nästa år beskrivs av

$$r_A = E(r_A) + 0.7(f_1 - \bar{f}_1) - 0.5(f_2 - \bar{f}_2) - 0.8(f_3 - \bar{f}_3).$$

(a) Bestäm den förväntade avkastningen på portfölj A. ....(2p)

(b) Bestäm standardavvikelsen för avkastningen på portfölj A. ....(2p)

(c) Om både produktiviteten och oljepriset ökar med 10 % under nästa år och inflationen blir som marknaden förväntar sig, vad blir då avkastningen på portfölj A? ....(1p)

(d) Antag att en person investerar hela sin förmögenhet i portfölj A och att alla faktorernas utveckling kan beskrivas med en normalfördelning. Bestäm denne persons 5%-Value-at-Risk. .... (5p)

3. ("Teori") Antag att det på en marknad finns n värdepapper där avkastningen på värdepapper i kan beskrivas av en enkel faktormodell utan felterm, $r_i = a_i + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j$ där a_i och b_{ij} är konstanter och f_j är stokastiska variabler (faktorer). Visa att det under antagande om arbitragefrihet finns konstanter λ_0 och λ_j, $j = 1, \ldots, m$ sådana att

$$\bar{r}_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\lambda_j.$$

Du får utan bevis använda följande lemma:

Givet en $m \times n$ matris A och en vektor $b \in \Re^n$. Då gäller att om $Ax = 0 \Rightarrow b^T x = 0$ så gäller att $b = A^T y$ för något $y \in \Re^m$. ....(10p)

4. En person har nyttofunktionen $u(w) = w + w^{1/2}$, där w betecknar personens förmögenhet.

(a) Är denna person riskaversiv, riskneutral, eller risksökande? .... (2p)

(b) Vilket av följande två alternativ skulle personen föredra?

Alternativ A		Alternativ B	
Förmögenhet	Sannolikhet	Förmögenhet	Sannolikhet
0.5	1/6	0.75	1/4
1	1/2	1	1/2
2	1/3	1.5	1/4

För att få poäng måste du motivera ditt svar noggrannt. .... (5p)

(c) Vad är personens säkra ekvivalent för alternativ A? .... (3p)

5. Antag att i en CAPM-värld finns data om fem stycken aktier. Dessa data återfinns i tabellen nedan:

Aktie i	Förväntad avkastning $(\bar{r}_i)$	Beta (β_i)	Specifik risk (σ_{e_i})
1	10	0.8	1
2	17	1.5	1
3	12	1	2
4	14	1.2	2
5	11	0.9	3

Antag att marknadens standardavvikelse är 10 och att den riskfria räntan är 2. Antag vidare att man kan modellera avkastningarna i enlighet med en faktormodell där marknadens avkastning är den enda faktorn.

(a) Bestäm den portfölj bestående av de fem aktierna som har lägst varians under antagandet om att man får korta (och naturligtvis inte handla i den riskfria tillgången). .... (5p)

(b) Bestäm, för fallet att man får handla i den riskfria tillgången, en effektiv portfölj som endast består av de fem aktierna. Antag att det är tillåtet att korta. (5p)

Förmodligen kan du få nytta av följande specialfall av Sherman-Morrison's formel: *Om A är positivt semidefinit och v en kolumnvektor så gäller att*

$$(A + vv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}vv^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}v}.$$

Normalfördelningstabell: $P(X \leq x)$ där $X \in N(0,1)$.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986