KTH Matematik

Tentamen i 5B1574 Portföljteori och riskvärdering
Lördagen den 15 januari 2005 kl. 8.00–13.00

Examinator: Ulf Brännlund, tel. 790 73 20.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

På tentamen kan maximalt 50 poäng erhållas. Dessutom kan maximalt 4 poäng tillgodoräknas från laborationerna. Totalt 24 poäng ger säkert godkänt.

---

1. (a) Beräkna Macauley duration och modifierad duration för en oändlig svit av årliga betalningar om A kronor där den första betalningen sker om ett år. Antag att dessa betalningar betingar priset P. ....(5p)

(b) Ställ upp formlerna för pris och Macauley duration på en (vanlig) femårig obligation som betalar ut årliga utdelningar om 5%. Antag att den handlas till yielden λ. ....(5p)

2. ("Sant eller Falskt?") På hela uppgiften ges poängen

$$\max(0, 2 \cdot (\text{Antal rätt - Antal fel})).$$

(a) Matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

är ett exempel på en kovariansmatris.

(b) Nyttofunktionen $u(x) = \log_{10}(ax+b)$ är ekvivalent med nyttofunktionen $v(x) = \ln(ax + b)$ där a och b är positiva tal.

(c) Ett koherent riskmått, $\rho(X)$, uppfyller olikheten

$$\rho(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha\rho(X) + (1-\alpha)\rho(Y),$$

för $\alpha \in [0, 1]$.

(d) Antag att din nettoförmögenhet i morgon X är en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärde μ och standardavvikelse σ. Då är din 95%-VaR $\approx \mu - 1.645\sigma$.

(e) Enligt den s.k. förväntningshypotesen beror dagens spoträntor på förväntningar om inflationen i framtiden.

3. Låt vektorn $\mathbf{w}^0$ utgöra portföljvikter av "riskabla" tillgångar som motsvarar en portfölj som har minimal varians. Låt $\mathbf{w}^1$ utgöra en annan portfölj.

(a) Låt kovariansen mellan avkastningen på portföljen $\mathbf{w}^0$ och avkastningen på portföljen $\mathbf{w}^1$ betecknas med σ_{01}. Visa att $\sigma_{01} = \sigma_0^2 =$ variansen på portföljen $\mathbf{w}^0$. .... (3p)

(b) Antag att $\mathbf{w}^1$ ligger på effektiva fronten. Bestäm en tredje portfölj $\mathbf{w}^2$ sådan att $\mathbf{w}^2$ är effektiv och sådan att kovariansen mellan avkastningarna på $\mathbf{w}^1$ och $\mathbf{w}^2$, $\sigma_{12} = 0$. .... (2p)

(c) Antag att $\mathbf{w}^z$ är en portfölj som har kovariansen noll med marknadsportföljen $\mathbf{w}^m$, dvs $\sigma_{zm} = \mathrm{cov}(r_z, r_m) = 0$, där $r_z = \sum_{i=1}^n w_i^z r_i$ och $r_m = \sum_{i=1}^n w_i^m r_i$. Antag vidare att marknadsportföljen är effektiv, dvs $\mathbf{w}^m$ löser problemet

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}\mathbf{w}^T V \mathbf{w} \\ \text{då} & \sum_{i=1}^n w_i = 1, \\ & \sum_{i=1}^n \bar{r}_i w_i = \bar{r}_m, \end{array}$$

där V är kovariansmatrisen.

Visa att

$$\bar{r}_i - \bar{r}_z = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}(\bar{r}_m - \bar{r}_z) \quad \text{för } i = 1, \ldots, n,$$

där σ_{im} är kovariansen mellan värdepapper i och σ_m^2 är variansen hos marknadsportföljen. .... (5p)

4. Antag att följande modell med två stycken index, f_1 och f_2, beskriver avkastningarna på en marknad med n stycken värdepapper

$$r_i = a_i + b_{i1} f_1 + b_{i2} f_2, \; i = 1, \ldots, n.$$

Antag att vi observerar tre portföljer av de n värdepapprena med följande egenskaper.

Portfölj	Förväntad avkastning	b_{p1}	b_{p2}
A	11.2	1	-0.2
B	12.7	2	0.3
C	11.0	0.5	-1.0

(a) Beskriv det plan i vilket förväntade avkastningarna måste finnas i jämvikt.(5p)

(b) Illustrera de arbitragemöjligheter som skulle finnas om det fanns en portfölj D med egenskaperna

$$\bar{r}_D = 11, \quad b_{D1} = 2, \quad b_{D2} = 1.$$

.... (3p)

(c) Antag att det finns en riskfri placering på denna marknad. Vilken avkastning har då denna? .... (2p)

5. ("Teori") Betrakta en obligationsmarknad där det finns N stycken obligationer. Antag att obligation i betalar ut beloppen C_{it} vid tidpunkterna $t = 1, \ldots, T$ och att idag handlas obligation i till priset π_i.

(a) Definiera vad som menas med en arbitrage-möjlighet i denna situation. . . (2p)

(b) Definiera vad som menas med diskonteringsfaktorer i denna situation. . . . (2p)

(c) Bevisa med hjälp av nedanstående lemma följande sats:

Sats: Det existerar positiva diskonteringsfaktorer om och endast om det inte finns några arbitrage-möjligheter.

Du behöver inte bevisa lemmat. . . . . (6p)

Lemma: *Låt A vara en $m \times n$ matris då gäller exakt ett av följande påståenden:*

i. Det existerar en strikt positiv vektor x sådan att $Ax = 0$.

ii. Det existerar en vektor y sådan att $0 \neq A^T y \geq 0$.

Lycka till!

Normalfördelningstabell: $P(X \leq x)$ där $X \in N(0,1)$.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986