KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamen i 5B1574 Portföljteori och riskvärdering
Fredagen den 26 augusti 2005 kl. 14.00–19.00
Med reservation för tryckfel, slarvfel och andra misstag.

---

1. (a) Se utdelat material.

(b) Se boken.

(c) Se boken.

2. (a) Nuvärdet av respektive investering är

$$PV_1 = -100 + \frac{180}{(1+0.1)} - \frac{17}{(1+0.1)^2} - \frac{66}{(1+0.1)^3} = 0\text{Mkr}$$

och

$$PV_2 = -100 + \frac{110}{(1+0.1)} + \frac{20}{(1+0.1)^2} + \frac{10}{(1+0.1)^3} = 24\text{Mkr}.$$

Alltså är den andra investeringen att föredra.

(b) Vi skall lösa

$$PV_2 = -100 + \frac{110}{(1+r)} + \frac{20}{(1+r)^2} + \frac{10}{(1+r)^3} = 0\text{Mkr}.$$

Interpolation ger $r \approx 31\%$

(c) Eftersom frågan är något ledande anar man att svaret är nej. Vi skall alltså hitta en annan ränta än 10% som löser:

$$PV_1 = -100 + \frac{180}{(1+r)} - \frac{17}{(1+r)^2} - \frac{66}{(1+r)^3} = 0.$$

Sätt $c = 1/(1+r)$ och sök rötterna till $f(c) = -100 + 180c - 17c^2 - 66c^3$. Genom att studera $f(c)$ finner man att även $r = (1-c)/c = 20\%$ ger nuvärdet 0. Internräntan är alltså inte väldefinierad.

3. (a) $a, b > 0$ ger en växande nyttofunktion vars andra derivata är negativ (riskaversiv).

(b) Låt x^0 beteckna Tuvas förmögenhet innan hon fått X. Den säkra ekvivalenten c löser $Eu(x^0 + X) = Eu(x^0 + c) = u(x^0 + c)$ vilket ger

$$c = -\frac{1}{a} \log Ee^{-aX}.$$

(c) Vi skall lösa $Eu(x^0) = Eu(x^0 - p + X)$. Detta ger samma svar som i b.

(d) Antag att Tuva satsar x kr. Det är värt för Tuva att satsa om $pu(x^0+ox)+(1-p)u(x^0-x) \geq u(x^0)$. Tuvas skall alltså maximera $pu(x^0+ox)+(1-p)u(x^0-x)$, eller ekvivalent

$$\text{maximera} - pe^{-aox} - (1-p)e^{ax}.$$

Vi deriverar med avseende på x pch sätter derivatan lika med noll och får

$$x = \frac{\log\left(\frac{op}{1-p}\right)}{a+ao}.$$

Förutsatt att $op > (1-p)$, annars är det optimalt med $x = 0$.

4. (a)

$$\begin{aligned} E(r) = E(\frac{p-c}{c}) &= E(\frac{p}{c}) - 1 = \{\ p \text{ och } c \text{ oberoende}\} \\ &= E(p)E(\frac{1}{c}) - 1 = 2 \cdot (1/2 \cdot \frac{1}{1.2} + 1/2 \cdot \frac{1}{1.8}) - 1 \\ &= 38.9\%. \end{aligned}$$

(b) $\sigma_{pM} = E(r-\bar{r})(r_M - \bar{r}_M) = E(\frac{p-\bar{p}}{c})(r_M - \bar{r}_M) = E(\frac{1}{c})E(p-\bar{p})(r_M - \bar{r}_M) = (0.5/1.2 + 0.5/1.8) \cdot 2\sigma_M^2 = 1.3889\sigma_M^2$

$$\beta = \sigma_{pM}/\sigma_M^2 = 1.3889.$$

(c) Enligt CAPM är den predikterade avkastningen $\bar{r} = r_f + \beta(\bar{r} - r_f) = 4 + 1.3889 \cdot (25-4) = 33.17\% < 38.9\%$. Projektet är alltså ett lönsamt projekt enligt CAPM.

5. Vi börjar med att beräkna nuvärdet av betalningsförpliktelserna är lika med nuvärdet av obligationsportföljen:

$$\frac{1.1}{(1+0.05)} + \frac{2.4}{(1+0.052)^2} + \frac{3.9}{(1+0.055)^3} = 6.5375$$

Om två år när de två åriga nollkupongarna förfaller får vi alltså $6.5375 \cdot (1+0.052)^2 = 7.2351$.

När vi ingår ett terminskontrakt om köp av statsobligation betalar vi inget nu men kommer att få 100 kr om 5 år och får betala F kr om 1 år. Vi beräknar först F. Om jag vill ha en säker utbetalning om 100 kr om 5 år kan jag få det på två sätt. Antingen köpa en statsobligation nu till priset $100/(1+0.061)^5$ eller också ingå ett terminskontrakt och betala F kronor om ett år. För att säkert ha F kronor då måste jag sätta in $F/(1+0.05)$ nu. Alltså $F = 100 \cdot (1+0.05)/(1+0.061)^5 = 78.0930$.

Om man ingår X kontrakt av denna typ är nuvärdet av portföljen som funktion av parallellförskjutning av spotkurvan med λ:

$$PV_P(\lambda) = \frac{7.2351 \cdot 10^6}{(1.052+\lambda)^2} - \frac{FX}{(1.05+\lambda)} + \frac{100X}{(1.061+\lambda)^5}$$

och motsvarande för betalningsförpliktelserna

$$PV_L(\lambda) = \frac{1.1 \cdot 10^6}{(1.05+\lambda)} + \frac{2.4 \cdot 10^6}{(1.052+\lambda)^2} + \frac{3.9 \cdot 10^6}{(1.055+\lambda)^3}$$

Vi deriverar och sätter in $\lambda = 0$:

$$PV_P'(0) = -\frac{2 \cdot 7.2351 \cdot 10^6}{(1.052)^3} + \frac{FX}{(1.05)^2} - \frac{5 \cdot 100X}{(1.061)^6}$$

$$PV_L'(0) = -\frac{1.1 \cdot 10^6}{(1.05)^2} - \frac{2 \cdot 2.4 \cdot 10^6}{(1.052)^3} - \frac{3 \cdot 3.9 \cdot 10^6}{(1.055)^4}$$

Vi sätter $PV_P'(0) = PV_L'(0)$ och löser ut $X \approx 7640$.