KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamen i 5B1574 Portföljteori och riskvärdering
Torsdagen den 12 januari 2005 kl. 8.00–13.00
Med reservation för tryckfel, slarvfel och andra misstag.

---

1. Se boken.

2. (a) Nuvärdet för respektive projekt är

$$\mathrm{PV}_1 = -100 + \frac{40}{1.05} + \frac{40}{1.05^2} + \frac{40}{1.05^3} = 8.92, \text{ och}$$
$$\mathrm{PV}_2 = -100 + \frac{100}{1.05} + \frac{10}{1.05^2} + \frac{5}{1.05^3} = 8.63.$$

Projekt 1 är att föredra.

(b) Internräntan för respektive projekt blir

$$\mathrm{IR}_1 = 9.7\%, \mathrm{och} \mathrm{IR}_2 = 12.8\%.$$

Projekt 2 är att föredra.

(c) Enligt sats i boken är internräntan väldefinierad om $c_0 < 0$, c_1, $c_2 \cdot >= 0$. Detta är uppfyllt i dessa fall.

3. Vi bildar en linjärkombination av obligationer som är sådan att kupongutbetalningarna och det nominella beloppet överensstämmer med de önskade. Låt x_i beteckna antalet obligationer av typ i. Vi får då ekvationssystemet

$$\begin{aligned}
5x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 6x_5 + 0x_6 &= 5\\
0x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 6x_5 + 0x_6 &= 6\\
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 6x_5 + 0x_6 &= 7\\
100x_1 + 100x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 &= 0\\
0x_1 + 0x_2 + 100x_3 + 100x_4 + 0x_5 + 0x_6 &= 0\\
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 100x_5 + 100x_6 &= 1
\end{aligned}$$

Detta har lösningen $x = (-1/5,\ 1/5,\ -1/4,\ 1/4,\ 7/6,\ -1/6)$.
Vi får priset

$$P = x \cdot (105.4,\ 95.7,\ 104.7,\ 89.6,\ 117.5,\ 84.4) = 117.3.$$

och durationen

$$D = x \cdot (105.4 \cdot 1.93,\ 95.7 \cdot 2.00,\ 104.7 \cdot 3.74,\ 89.6 \cdot 4.00,\ 117.5 \cdot 5.20,\ 84.4 \cdot 6.00)/117.3 = 5.27 \text{år}.$$

4. (a) Låt $e = (1, 1, 1, 1)^T$. Den portfölj som har lägst varians svarar mot den man får när man löser problemet $\min_w 0.5w^T Cw - \mu e^T w$, dvs $\lambda = 0$ och lämpligt val av μ. Välj alltså $\mu = 0.5$. Det ger att

$$w^a = w = (0.4,\ 0.15,\ 0.25,\ 0.2)^T.$$

(b) Vi får en andra lösning på den effektiva fronten genom att normalisera lösningen vi fått genom att sätta $\lambda = 1$ och $\mu = 0$. Det ger

$$w^b = w = (0.3,\ 0.25,\ 0.3,\ 0.15)^T,$$

vilket svarar mot att lösa det relaxerade problemet med $\lambda = 2$ och $\mu = 0$. De två lösningarna har förväntad avkastningar lika med

$$\bar{r}^a = (5, 10, 8, 6)(0.4,\ 0.15,\ 0.25,\ 0.2)^T = 6.7\%$$

respektive

$$\bar{r}^b = (5, 10, 8, 6)(0.3,\ 0.25,\ 0.3,\ 0.15)^T = 7.3\%.$$

Vi bildar en linjär kombination, $w^c = \alpha w^a + (1-\alpha)w^b$, av dessa båda portföljer så att $\alpha 6.7 + (1-\alpha)7.3 = 8$, vilket ger $\alpha = -7/6$. Det ger

$$w^c = (11/60,\ 11/30,\ 43/120,\ 11/120)^T.$$

(c) När vi har en riskfri tillgång också skall vi lösa problemet:

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}w^T Cw \\ \text{då} & \bar{r}^T w + r_f w_0 = r^* \\ & e^T w + w_0 = 1 \end{array}$$

Inför pss som ovan multiplikatorerna λ och μ. Optimalitetsvillkoren för att $(w_0, w) = (0, w^d)$ skall vara en optimal lösning är då att det skall finnas λ och μ sådana att

$$\begin{aligned} Cw^d &= \lambda\bar{r} + \mu e \\ -\lambda r_f &= \mu \\ e^T w^d &= 1. \end{aligned}$$

De två översta ger ekvationerna ger $Cw^d = \lambda(\bar{r} - r_f e)$. Samtidigt vet vi enligt två-fondssatsen att $w^d = \alpha w^a + (1-\alpha)w^b$ för något lämpligt val av α. Det ger i kombination med uppgift a och b att

$$\alpha Cw^a + (1-\alpha)Cw^b = \alpha \cdot 0.5 \cdot e + (1-\alpha) \cdot 2 \cdot \bar{r} = \lambda\bar{r} - \lambda r_f e.$$

Vi skall alltså lösa

$$\begin{aligned} 0.5\alpha &= -0.05\lambda \\ 2(1-\alpha) &= \lambda. \end{aligned}$$

Vi får $\alpha = -0.25$ och $\lambda = 5/2$ och därmed

$$w^d = (0.2750,\ 0.2750,\ 0.3125,\ 0.1375)^T.$$

5. Det finns arbitragemöjligheter. Bilda kombinationen: Köp en A-Call, sälj en A-Put, sälj en B-Call, köp en B-Put och köp en option att byta en A-aktie mot en B-aktie. Detta ger idag -23 + 11 + 30 - 8 - 5 = 5 kr. Samtidigt kommer man vid tidpunkten T få pengar om $S_T^A > S_T^B$, men inte riskera någon förlust.