KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamen i 5B1574 Portföljteori och riskvärdering
Tisdagen den 19 oktober 2004 kl. 14.00–19.00
Med reservation för tryckfel, slarvfel och andra misstag.

---

1. (a) $e^{-s(t_2)t_2} = e^{-f(t_1,t_2)(t_2-t_1)}e^{-s(t_1)t_1}$ ger

$$f(t_1,t_2) = \frac{s(t_2)t_2 - s(t_1)t_1}{t_2 - t_1}.$$

(b)

$$\begin{aligned} r(t) &= \lim_{h\downarrow 0} f(t, t+h) \\ &= \lim_{h\downarrow 0} \frac{s(t+h)(t+h) - s(t)t}{h} \\ &= \lim_{h\downarrow 0} s(t+h) + \lim_{h\downarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} t \\ &= s(t) + s'(t)t \end{aligned}$$

(c) Priset ges av

$$P = \frac{5}{1+0.04} + \frac{5}{(1+0.04)^2} + \frac{105}{(1+0.04)^3} = 102.78$$

och durationen av

$$D = \frac{1 \cdot \frac{5}{1+0.04} + 2 \cdot \frac{5}{(1+0.04)^2} + 3 \cdot \frac{105}{(1+0.04)^3}}{P} = 2.86.$$

2. Låt C_{it} beteckna obligation i utbetalning år t, och π_i obligation is pris. Vi beräknar diskonteringsfaktorerna, d_t ur sambandet $\pi_i = \sum_{t=1}^{4} C_{it} d_t$ och får

$$d^T = (0.8,\ 0.6,\ 0.4,\ -0.1).$$

Det finns arbitrage eftersom diskonteringsfaktor d_4 är negativ. Återstår att finna ett sådan: Tag till exempel: Köp en obligation 4 och sälj 30/35 av obligation 2. Detta ger intäkten 30 år 4 och intäkten 3 nu.

3. (a) Vi beräknar först

$$\bar{r}_X = 0.25 \cdot (30 + 15 + 5 + (-10)) = 10\%$$

och

$$\bar{r}_M = 0.25 \cdot (20 + 10 + 5 + (-5)) = 7.5\%.$$

Sedan beräknar vi $\sigma_M^2 = 0.25 \cdot ((20-7.5)^2 + (10-7.5)^2 + (5-7.5)^2 + (-5-7.5)^2) = 81.25$ och $\sigma_{XM} = 0.25 \cdot ((20-7.5) \cdot (30-10) + (10-7.5) \cdot (15-10) + (5-7.5) \cdot (5-10) + (-5-7.5) \cdot (-10-10)) = 131.25$. Vi får

$$\beta_X = 131.25/81.25 = 1.6154.$$

Vi kan då ur CAPM-formeln $\bar{r}_X = r_f + \beta_X(\bar{r}_M - r_f)$ beräkna

$$r_f = (10 - 1.6154 \cdot 7.5)/(1 - 1.6154) = 3.44\%.$$

(b) Låt Q beteckna utbetalningen av värdepapperet. Väntevärdet

$$\bar{Q} = E(Q) = 50.$$

Vi beräknar $\mathrm{cov}(Q, r_M) = 0.25 \cdot ((100-50) \cdot (20-7.5) + (100-50) \cdot (10-7.5) + (0-50) \cdot (5-7.5) + (0-50) \cdot (-5-7.5) = 375$. Vi får ur formeln

$$P = \frac{1}{1+r_f} \cdot \left[\bar{Q} - \frac{\mathrm{cov}(Q, r_M)(\bar{r}_M - r_f)}{\sigma_M^2}\right]$$

att

$$P = \frac{1}{1+0.0344} \cdot \left[50 - \frac{375 \cdot (7.5 - 3.44)}{81.25}\right] = 30.2.$$

4. BAB skall betala $15 \cdot 0.065 = 0.975$ MUSD och får $100 \cdot 0.06 = 6$ Mkr varje år de närmaste tre åren. För att värdera dessa betalningsströmmar beräknar vi hur mycket vi måste sätta in på banken för att täcka dessa betalströmmar. För att säkert kunna betala dollar betalningen "sätter vi in dollar på banken" och får ränta i dollar. Detta kostar oss idag $8 \cdot 0.975 \cdot (1/(1+0.05)^1 + 1/(1+0.05)^2 + 1/(1+0.05)^3) = 21.2413$ Mkr samtidigt kan vi "ta ut pengar från banken" för att täcka intäkten i kronor: $6 \cdot (1/(1+0.04)^1 + 1/(1+0.04)^2 + 1/(1+0.04)^3) = 16.6505$ Mkr. Värdet av swappen är $16.6505 - 21.2413 = -4.5908$ Mkr.

5. Se boken.