KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamen i 5B1574 Portföljteori och riskvärdering
Torsdagen den 20 oktober 2005 kl. 14.00–19.00
Med reservation för tryckfel, slarvfel och andra misstag.

---

1. (a) Vi gör avläsningen i grafen $s_1 = 0.0182$ och $s_2 = 0.0201$. Priset ges av

$$P = e^{-s_1 \cdot 1}5 + e^{-s_2 \cdot 2}105 = 105.77.$$

(b) Den relativa priskänsligheten ges av $\frac{dP/P}{d\lambda} = -\frac{e^{-s_1 \cdot 1}5 + 2 \cdot e^{-s_2 \cdot 2}105}{P} = -1.9536$. Kontroll: Sätt $\lambda = 0.001$. Vi får då $P = e^{-(s_1+0.001)\cdot 1}5 + e^{-(s_2+0.001)\cdot 2}105 = 105.57$, dvs priset har gått ner $(105.77 - 105.57)/105.77 = 0.0019$ vilket stämmer väl överens med resultatet.

(c) Terminspriset P uttryckt i miljoner kronor löser $e^{-s_{0.25}\cdot 0.25}P - e^{-s_{0.75}\cdot 0.75}1 = 0$. Vi läser av $s_{0.25} = 0.0146$ och $s_{0.75} = 0.0169$. Vi får $P = 991\ 016$ kronor.

(d) Värdet av en sådan position som funktion av ett skift i nollkupongskurvan är $V(\lambda) = e^{-(s_{0.25}+\lambda)\cdot 0.25}9910160 - e^{-(s_{0.75}+\lambda)\cdot 0.75}1000000$. Vi får

$$\frac{dV}{d\lambda} = -0.25e^{-s_{0.25}\cdot 0.25}9910160 + 0.75e^{-s_{0.75}\cdot 0.75}1000000 = 493.7025.$$

Kontroll: Sätt $\lambda = 0.001$. Då blir värdet av positionen $e^{-0.0156\cdot 0.25}991016 - e^{-0.0179\cdot 0.75}1\ 000\ 000 = 493.85$ vilket stämmer väl överens.

2. Låt priset på nollkupongaren vara P_0 och låt α_1 och α_2 vara andelar av obligationerna så att summan av dem motsvarar nollkupongaren. Vi får då ekvationssystemet

$$\begin{array}{rcl}
\text{(Priserna lika)} & & \\
P_0 & = & 84.50\alpha_1 + 68.80\alpha_2 \\
\text{(Kupongränta efter skatt lika)} & & \\
0 & = & 8(1-t)\alpha_1 + 6(1-t)\alpha_2 \\
\text{(Lösen efter skatt lika)} & & \\
100 - s(100 - P_0) & = & \alpha_1(100 - s(100 - 84.50)) + \alpha_2(100 - s(100 - 68.80))
\end{array}$$

Det är uppenbart att α_1, α_2 och P_0 ej beror av t eftersom t förkortas bort i den andra ekvationen. Efter insättning fås:

$$\begin{array}{rcl}
P_0 & = & 84.50\alpha_1 + 68.80\alpha_2 \\
0 & = & 8\alpha_1 + 6\alpha_2 \\
75 + 0.25P_0 & = & 96.125\alpha_1 + 92.2\alpha_2
\end{array}$$

som har lösningen $P_0 = 21.7,\ \alpha_1 = -3,\ \alpha_2 = 4.$

3. Det mesta i denna uppgift kan ni hitta svar på i boken.

4. Enligt APT satsen så ges de förväntade avkastningarna av $\bar{r}_i = \lambda_0 + b_{i1}\lambda_1 + b_{i2}\lambda_2$. Om vi utnyttjar detta på det tre första aktierna i tabellen får vi ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 14 &= \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2, && (1) \\ 13 &= \lambda_0 + 1\lambda_1 + 3\lambda_2, && (2) \\ 13 &= \lambda_0 + 3\lambda_1 - 1\lambda_2. && (3) \end{aligned}$$

Detta har lösningen $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (8, 2, 1)$. Därmed blir $\bar{r}_4 = 8 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 11$ och $\bar{r}_5 = 8 + 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 15$. En riskfri investering har $b_1 = b_2 = 0$ och alltså så är $r_f = \lambda_0 = 8$.

5. Låt h beteckna antalet terminskontrakt som ingås i vete. Betalningarna om sex månader blir då $X = WS_h + (S_v - F_0)h$, där $F_0 = 1700$ är det aktuella terminspriset på vete. Vi vill minimera $V(X) = V(WS_h + (S_v - F_0)h) = V(WS_h) + V(S_v)h^2 + 2h\,\mathrm{cov}(WS_h, S_v)$ med avseende på h. Vi får då

$$h = -\frac{\mathrm{cov}(WS_r, S_v)}{V(S_v)}$$

där

$$V(S_v) = e^{2 \cdot 7.4 + 0.2^2}(e^{0.2^2} - 1) = 113685.$$

Låt $w = \log(W)$, $s_h = \log(S_h)$ och $s_v = \log(S_v)$. Vi har då att $w + s_h \in N(6.3 + 6.5, \sqrt{0.01 + 0.09 - 2 \cdot 0.003}) = N(12.8, 0.3066)$ och att $\mathrm{cov}(w+s_h, s_v) = \mathrm{cov}(s_h, s_v) = 0.054$. Vi får då

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(WS_r, S_v) &= \mathrm{cov}(e^{w+s_h}, e^{s_v}) && (4) \\ &= e^{12.8+7.4+\frac{1}{2}(0.094+0.2)}(e^{0.054} - 1) && (5) \\ &= 38.086 \cdot 10^6, && (6) \\ & && (7) \end{aligned}$$

vilket ger $h = -335$.