



KTH Matematik

**Tentamen i 5B1574 Portföljteori och riskvärdering**  
**Torsdagen den 20 oktober 2005 kl. 14.00–19.00**

*Examinator:* Ulf Brännlund, tel. 790 73 20.

*Tillåtna hjälpmedel:* Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

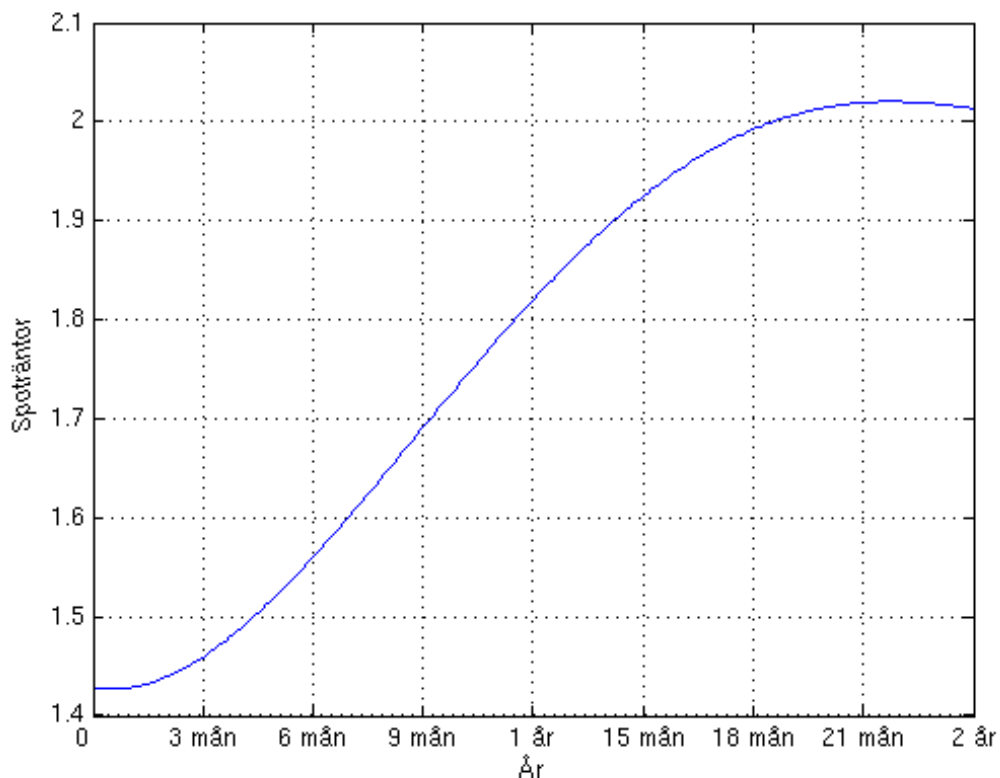
*Lösningsmetoder:* Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

*OBS!* Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

På tentamen kan maximalt 50 poäng erhållas. Dessutom kan maximalt 4 poäng tillgodoräknas från laborationerna. Totalt 24 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Använd grafen i figur 1 över nollkupongsräntorna på statspapper. Var noga med att ange vilken avläsning du gör, när du läser av grafen.



Figur 1: Nollkupongsräntor uttryckta i procent årlig avkastning. Konventionen är kontinuerligt sammansatt ränta.

- (a) Vilket pris har en 2 årig statsobligation med 5 %-kupong (årlig) uttryckt i procent av nominella beloppet. .... (2p)
- (b) Beräkna genom att använda formlerna för Fisher-Weil duration ovanstående obligations relativa priskänslighet för (små) skift av nollkupongskurvan. Kontrollera att ditt svar är rimligt genom att göra en liten förändring av nollkupongsräntorna och på nytt beräkna priset som i a-uppgiften. .... (3p)
- (c) Vilket är terminspriset för en 6 månaders statsskuldväxel om nominellt belopp 1 miljon kronor med leverans om 3 månader. .... (2p)
- (d) Antag att du är lång en sådan position som i c-uppgiften. Hur förändras värdet av denna position i absoluta tal, när nollkupongskurvan skiftar uppåt? Kontrollera att ditt svar är rimligt på samma sätt som i b-uppgiften. .... (3p)

2. Om man köper en obligation och behåller den till lösendagen kan skatteeffekterna beskrivas på följande sätt. Kupongräntan beskattas som inkomst av kapital varje år medan skillnaden mellan det nominella beloppet och originalpriset beskattas som en realisationsvinst det år som lösen sker. Antag att inkomst av kapital beskattas med en skattesats  $t = 30\%$  och att realisationsvinster beskattas med en skattesats på  $s = 25\%$ . Antag att det finns två stycken 10 åriga statsobligationer, båda med det nominella beloppet 100 kr. Obligation 1 är en 8% obligation med priset  $P_1 = 84.50$  kr och obligation 2 är en 6 % obligation med priset  $P_2 = 68.80$  kr.

Vilket pris bör en 10 årig nollkupongare utgiven av staten betinga? Detta pris skall vara konsistent (efter skatt) med de två andra obligationerna. Visa att priset inte beror på skattesatsen  $t$ . Antag att alla kassaflöden sker i slutet av varje år. .. (10p)

3. Skissa i en figur det principiella utseendet på det "uppnåliga" området i  $(\sigma, \bar{r})$ -planet för Markovitz-modellen under följande förutsättningar:

- (a) Det finns ingen riskfri investering. Det är tillåtet att blanka (dvs sälja ett värdepapper som man inte har). .... (1p)

I (b),(c) och (d) är det viktigt att ni visar relationen till figuren i (a). Detta kan t.ex. göras genom att kalkera lösningen i (a) till ett nytt blad.

- (b) Som i (a) men det är inte tillåtet att blanka. .... (1p)
- (c) Som i (a) med tillägget att man kan låna in och låna ut (riskfritt) till räntan  $r_f$ . .... (1p)
- (d) Som i (a) med tillägget att man kan låna ut till den riskfria räntan  $r_f$  och låna in till räntan  $r_u$  ( $r_u > r_f$ ). .... (2p)
- (e) I CAPM-modellen har den s.k. marknadsportföljen en central roll. Rita in denna i din figur i (c). Redogör för vad som utgör marknadsportföljen och för argumentet för dess placering i figuren i (c). .... (3p)

- (f) Vad är det centrala resultatet i CAPM om hur förväntade avkastningar förhåller sig till förväntad marknadsavkastning och den riskfria räntan? ..... (2p)

4. Antag att fem stycken aktier tros följa en faktormodell med två stycken faktorer,  $f_1$  och  $f_2$  så att avkastningen på aktie  $i$  beskrivs av

$$r_i = a_i + b_{i1}f_1 + b_{i2}f_2, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Vi har följande data

Aktie	Förväntad avkastning	$b_{i1}$	$b_{i2}$
1	14	2	2
2	13	1	3
3	13	3	-1
4	-	1	1
5	-	4	-1

Bestäm de förväntade avkastningarna för aktierna 4 och 5. Om det finns en riskfri investering på denna marknad vad har den i så fall för avkastning? ..... (10p)

5. Bonden Torsten har genom just sått sina åkrar med havre. Skördetid är om sex månader. Torsten uppskattar att storleken på skörden mätt i antal ton,  $W$ , är log-normalfördelad med  $\mu = 6.3$  och  $\sigma = 0.1$ , dvs att  $(\log(W) \in N(6.3, 0.1))$ . Med utgångspunkt från dagens spotpris och historiska data uppskattar Torsten att spotpriset på havre mätt i kr/ton,  $S_h$ , om sex månader också är log-normalfördelat,  $\log(S_h) \in N(6.5, 0.3)$ . Torstens skörd är svagt negativt korrelerad med priset på havre. Torsten bedömer att  $\text{cov}(\log(S_h), \log(W)) = -0.1 \cdot 0.3 \cdot 0.1 = -0.003$ .

För tillfället finns det inga terminskontrakt på havre, men däremot på vete. Priset på vete om sex månader,  $S_v$  kan antas vara log-normalfördelat,  $\log(S_v) \in N(7.4, 0.2)$ . Just nu är terminspriset på vete med leverans om sex månader 1700 kr/ton.

Spotpriserna på vete och havre ( $S_v$  respektive  $S_h$ ) är starkt korrelerade:

$$\text{cov}(\log(S_v), \log(S_h)) = 0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = 0.054.$$

Antag att Torstens skörd är oberoende av priset på vete. Bestäm en min-varians hedge för Torsten. .... (10p)

Ledning: Om  $\log(X) \in N(\mu_x, \sigma_x)$  så gäller att väntevärdet  $E(X) = e^{\mu_x + \sigma_x^2/2}$ . Om också  $\log(Y) \in N(\mu_y, \sigma_y)$  och  $\text{cov}(\log(X), \log(Y)) = \sigma_{xy}$  så gäller att  $\text{cov}(X, Y) = e^{\mu_x + \mu_y + \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}(e^{\sigma_{xy}} - 1)$ .

*Lycka till!*