KTH Matematik

Tentamen i 5B1712 och 5B1717 Optimeringslära för F.
Fredag 1 juni 2007 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt.
Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis, förutsatt att de formuleras korrekt.

Maxpoäng på tentan är 50 poäng plus eventuella bonuspoäng från hemuppgifterna.
Olika uppgifter kan ge olika mycket poäng.
24 poäng, inklusive bonus, ger godkänt. 22-23 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har offentliggjorts.
Behandla endast en uppgift per blad! Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Ett företag tillverkar de tre produkterna A, B och C.
Tillverkningen består av momenten *stansning* och *pressning*.
Varje produkt måste genomgå *bägge* momenten.

Stansavdelningen, som kan utnyttjas 8 timmar per dag, har följande kapacitet:
2000 enheter per timme av produkt A, eller
1600 enheter per timme av produkt B, eller
1100 enheter per timme av produkt C.
Avdelningen kan utan problem ställa om från en produkt till en annan.

Pressavdelningen, som kan utnyttjas 8 timmar per dag, har följande kapacitet:
1000 enheter per timme av produkt A, eller
1500 enheter per timme av produkt B, eller
2400 enheter per timme av produkt C.
Avdelningen kan utan problem ställa om från en produkt till en annan.

Täckningsbidraget (intäkt minus rörlig kostnad) per tillverkad enhet av respektive produkt är: 12 kr för A, 9 kr för B och 8 kr för C.

Företaget vill nu bestämma hur många enheter av respektive produkt som ska tillverkas (i genomsnitt) per dag för att det totala täckningsbidraget ska bli så stort som möjligt utan att man bryter mot avdelningarnas kapacitetsbegränsningar.

Din uppgift är att *formulera* företagets problem som ett LP-problem. Däremot behöver du inte beräkna optimal lösning till detta LP-problem. .... (4p)

(b) I denna deluppgift betraktas ett så kallat balanserat transportproblem med fyra fabriker och fyra kunder, dvs ett problem på formen

$$\begin{aligned}
\text{minimera} \quad & \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \\
\text{då} \quad & \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = s_i\,, \quad \text{för } i = 1,\dots,4 \\
& \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = d_j\,, \quad \text{för } j = 1,\dots,4 \\
& x_{ij} \geq 0\,, \quad \text{för alla } i \text{ och } j,
\end{aligned}$$

där
s_i = given tillgång hos fabrik nr i,
d_j = given efterfrågan hos kund nr j,
c_{ij} = given transportkostnad per enhet från fabrik nr i till kund nr j,
x_{ij} = antal enheter man väljer att transportera från fabrik nr i till kund nr j.
Antag att tillgången hos fabrikerna och efterfrågan hos kunderna ges av
$s_1 = 40,\ s_2 = 30,\ s_3 = 20,\ s_4 = 10,\ d_1 = 10,\ d_2 = 20,\ d_3 = 30,\ d_4 = 40,$
och att transportkostnaderna ges av tabellen:

c_{ij}	kund 1	kund 2	kund 3	kund 4
fab 1	116	125	136	149
fab 2	109	116	125	136
fab 3	104	109	116	125
fab 4	101	104	109	116

Med hjälp av "North West Corner"-metoden erhålls följande tillåtna baslösning:

x_{ij}	kund 1	kund 2	kund 3	kund 4	s_i
fab 1	10	20	10	0	40
fab 2	0	0	20	10	30
fab 3	0	0	0	20	20
fab 4	0	0	0	10	10
d_j	10	20	30	40	

Avgör om detta är en optimal lösning eller ej till problemet. .... (4p)

2. Betrakta följande LP-problem:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{minimera} & -3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & \leq & 8, \\
& x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \leq & 4, \\
& x_1 & & & & & & & \geq & 0, \\
& & & x_2 & & & & & \geq & 0, \\
& & & & & x_3 & & & \geq & 0, \\
& & & & & & & x_4 & \geq & 0.
\end{array}$$

(a) Överför problemet till standardform med hjälp av två slackvariabler x_5 och x_6. Använd sedan simplexmetoden för att lösa problemet. Starta med nyssnämnda slackvariabler som basvariabler. . . . . (4p)

(b) Antag att målfunktionskoefficienten framför x_4 ändras från 5 till 2. Använd simplexmetoden på detta modifierade problem. Det är tillåtet att starta i slutlösningen från (a)-uppgiften. Förklara vad som händer. . . . . (4p)

(c) Formulera det duala LP-problemet svarande mot problemet på standardform (med 6 variabler) från (a)-uppgiften. Åskådliggör det tillåtna området till detta duala problem i en figur med dualvariablerna y_1 och y_2 på axlarna. . . . . . (2p)

(d) Hur ser motsvarande figur ut för det duala LP-problemet svarande mot problemet på standardform från (b)-uppgiften? Kommentera figuren! . . . . (2p)

3. Denna uppgift handlar om ett litet elektriskt nätverk med resistanser på länkarna. Nätverket har nodmängden $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ (dvs total 4 st noder) och länkmängden $\mathcal{B} = \{(1, 3),\ (1, 4),\ (2, 3),\ (2, 4)\}$. (Det går alltså ingen länk mellan noderna 1 och 2 och ingen länk mellan noderna 3 och 4, men i övrigt går det en länk mellan varje nodpar.) Varje länk $(i, j) \in \mathcal{B}$ har en given resistans R_{ij} Ohm.

Antag nu att man utifrån (mha strömkällor) matar in strömmen 500 mA i nod 1 och strömmen 100 mA i nod 2 medan man tar ut strömmen 500 mA från nod 3 och strömmen 100 mA från nod 4. Den totala (värme-)effekten i nätverket ges då av

$$R_{13}x_{13}^2 + R_{14}x_{14}^2 + R_{23}x_{23}^2 + R_{24}x_{24}^2,$$

där x_{ij} = strömmen i länken (i, j). (Om $x_{ij} > 0$ så går strömmen i länken från nod i till nod j, medan om $x_{ij} < 0$ så går strömmen i länken från nod j till nod i.)

Naturen väljer strömmarna x_{ij} på ett sådant sätt att ovanstående summa minimeras under bivillkor på strömbalanser i de tre första noderna. Strömbalans i den fjärde noden, dvs $-x_{14} - x_{24} = -100$, följer av strömbalanserna i de övriga tre noderna, som för alla balanserade nätverksflödesproblem.

Din uppgift är nu att beräkna länkströmmarna x_{ij} genom att lösa ovannämnda optimeringsproblem som har en konvex kvadratisk målfunktion och linjära likhetsbivillkor. Använd en generell metod för denna typ av kvadratisk optimering.
Du får för enkelhets skull anta att $R_{ij} = 1$ för alla länkar. . . . . (8p)

4. Låt n vara ett givet (stort) heltal, och låt n-variabelfunktionen f vara given av

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} (x_j^4 - x_j^3 + x_j^2 - x_j), \text{ där } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T} \in I\!R^n.$$

(a) Avgör om f är en konvex funktion på hela $I\!R^n$. . . . . (4p)

(b) Antag nu att man vill minimera $f(\mathbf{x})$ utan några bivillkor.
Din uppgift är då att utföra *en* fullständig iteration med Newtons metod utgående från startpunkten $\mathbf{x}^{(1)} = (1, \ldots, 1)^\mathsf{T}$.
Kontrollera att din erhållna punkt $\mathbf{x}^{(2)}$ uppfyller $f(\mathbf{x}^{(2)}) < f(\mathbf{x}^{(1)})$. . . . . . . (4p)

5. I följande optimeringsproblem är talet c_1 en konstant.

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & c_1x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ \text{då} \quad & x_1^2 + x_2^2 \leq 2, \\ & x_1^2 + x_3^2 \leq 2, \\ & x_2^2 + x_3^2 \leq 2. \end{aligned}$$

(a) Avgör om det är ett konvext optimeringsproblem eller ej.
Motivera svaret ordentligt. .... (1p)

(b) Ställ upp KKT-villkoren för problemet. .... (1p)

(c) Finns det något eller några värden på konstanten c_1 som gör att punkten $\mathbf{x} = (1.4,\, 0.2,\, 0.2)^\mathsf{T}$ är en optimal lösning till problemet?
Bestäm i såfall *samtliga* sådana värden på c_1. .... (4p)

(d) Finns det något eller några värden på konstanten c_1 som gör att punkten $\mathbf{x} = (1,\, 1,\, 1)^\mathsf{T}$ är en optimal lösning till problemet?
Bestäm i såfall *samtliga* sådana värden på c_1. .... (4p)

Frivillig räknehjälp: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

(e) I hela denna avslutande deluppgift antar vi att $c_1 = -6$.
Den duala målfunktionen $\varphi(\mathbf{y})$ till ovanstående problem definieras som bekant med hjälp av Lagrangerelaxering. Din uppgift är att beräkna det duala målfunktionsvärdet $\varphi(\hat{\mathbf{y}})$ i punkten $\hat{\mathbf{y}} = (1, 1, 1)^\mathsf{T}$, samt avgöra om $\hat{\mathbf{y}}$ är en optimal lösning till det duala problemet. .... (4p)

Lycka till!