KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Lördagen den 1 september 2001 kl. 8.00–13.00.

Kortfattade lösningsförslag.

1. (a) Nej.

(b) Nej.

(c) Ja. (Uppgiften är olyckligt formulerad, då "naturliga" svaret är nej, vilket också avsågs med frågan. Som frågan är ställd kan man tänka sig "urartade fall" där $x(\mu)$ är konstant identisk med optimallösningen till linjärprogrammeringsproblemet, till exempel för ett problem på standardform med $A = 1$, $b = 1$ och $c = 1$, där $x(\mu) = 1$ för alla $\mu > 0$. Man bör i uppgiftslydelsen exempelvis göra tillägget att $x(\mu)$ inte får vara oberoende av μ.)

(d) Ja.

(e) Ja.

2. (Se kursmaterialet.)

3. Det primal-duala ekvationssystemet blir för vårt exempel

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2, && \text{(1a)}\\ y + s_1 &= 4, && \text{(1b)}\\ y + s_2 &= 1, && \text{(1c)}\\ x_1 s_1 &= \mu, && \text{(1d)}\\ x_2 s_2 &= \mu. && \text{(1e)} \end{aligned}$$

där vi dessutom implicit kräver $x > 0$ och $s > 0$. Exempelvis kan vi ur (1b)–(1e) uttrycka x_1, x_2, y och s_2 som funktion av s_1 enligt

$$x_1 = \frac{\mu}{s_1}, \; x_2 = \frac{\mu}{s_1 - 3}, \; y = 4 - s_1, \; s_2 = s_1 - 3.$$

Insättning i (1a) ger $\frac{\mu}{s_1} + \frac{\mu}{s_1-3} = 2$ eller ekvivalent $s_1^2 - (3+\mu)s_1 + (3/2)\mu = 0$. Den positiva roten till denna andragradsekvation ges av

$$s_1 = \frac{3}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{\sqrt{9+\mu^2}}{2}.$$

(Endast den positiva roten kan komma ifråga, eftersom s_2 annars skulle bli negativ, då $s_2 = s_1 - 3$.) Därmed kan vi, efter förenkling, uttrycka lösningen som

$$x(\mu) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\mu}{3} - \frac{\sqrt{9+\mu^2}}{3} \\ 1 - \frac{\mu}{3} + \frac{\sqrt{9+\mu^2}}{3} \end{pmatrix}, y(\mu) = \frac{5}{2} - \frac{\mu}{2} - \frac{\sqrt{9+\mu^2}}{2},$$
$$s(\mu) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{\sqrt{9+\mu^2}}{2} \\ -\frac{3}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{\sqrt{9+\mu^2}}{2} \end{pmatrix}.$$

(Som rimlighetskontroll kan man räkna ut $\lim_{\mu\to 0} x(\mu) = (0 \;\; 2)^T$, $\lim_{\mu\to 0} y(\mu) = 1$ och $\lim_{\mu\to 0} s(\mu) = (3 \;\; 0)^T$, vilket är optimallösningar till respektive primala och duala problem.)

4. (a) Vi får

$$\begin{aligned} \varphi(u) = \quad \min \quad & (u_1+u_2-2)x_1 + (u_1-u_2-3)x_2 + (u_1-4)x_3 \\ & +(u_1+3u_2-5)x_4 - 2u_1 + u_2 \\ \text{då} \quad & x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\dots,4. \end{aligned}$$

(b) Speciellt har vi

$$\begin{aligned} \varphi(u^{(0)}) = \quad \min \quad & x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 \\ \text{då} \quad & x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\dots,4. \end{aligned}$$

Minimerande $x(u^{(0)})$ ges av $x(u^{(0)}) = (0\;1\;1\;0)^T$ vilket ger $\varphi(u^{(0)}) = -7$. En subgradient till φ i $u^{(0)}$ ges av $g(x(u^{(0)})) = (0\;0)^T$. Låt alltså $g^{(0)} = (0\;0)^T$.

(c) Om nollvektorn är en subgradient har vi hittat dualt optimum.

(d) Vi får $x(u^{(0)})$ optimal till (IP), eftersom $g(x(u^{(0)})) = (0\;0)^T$ implicerar att $x(u^{(0)})$ är tillåten till (IP) och dualitetsgapet är noll.

5. Känslighetsanalys ger

$$z(l(d)) = b^T y_0 + d \cdot l_0^T s_0 = -1 + 12d.$$

Alltså har vi $k = 12$ och $m = -1$.

Vi har en utökad baslösning, där x_1 och x_2 är basvariabler och x_3 och x_4 ligger vid sin undre gräns. Optimallösningen ändras enligt $Bx_B + Nx_N = b$, där

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad x_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} d, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Insättning ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3d \\ 4 - 11d \end{pmatrix}.$$

Lösning av ekvationssystemet ger

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5d \\ 1-8d \end{pmatrix}.$$

Kravet blir alltså att x_1 och x_2 är tillåtna, dvs

$$\begin{pmatrix} 2+5d \\ 1-8d \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -d \\ 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger $-1/3 \leq d \leq 1/8$.