



KTH Matematik

5B1815 Tillämpad linjär optimering

Föreläsning 1

Introduktion till kursen. Linjärprogrammeringsmodeller.

Exempelproblem

Antag följande:

- m fabriker, fabrik i kan tillverka a_i enheter av en viss vara,
- n kunder, kund j efterfrågar b_j enheter av varan,
- Transportkostnaden från fabrik i till kund j är c_{ij} kronor per enhet.

Hur ska transporten utföras på billigast möjliga sätt?

Formulering av exempelproblem

Inför variabler x_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, med betydelsen antal enheter som skickas från fabrik i till kund j .

- Bivillkor:

Produktionskapacitet: $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i$, $i = 1, \dots, m$.

Efterfrågekrav: $\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j$, $j = 1, \dots, n$.

Variabelbegränsning: $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

- Målfunktion:

Transportkostnad: $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$.

Exempelproblemet som ett optimeringsproblem

Formulering:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{då} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Detta är ett *linjärprogrammeringsproblem*, dvs ett problem med linjär målfunktion och linjära bivillkor.

(Denna speciella form kallas transportproblem.)

Exempelproblem med stokastik

Antag exempelproblemet med följande utvidgning av modellen:

- Efterfrågan hos kund j är normalfördelad med medelvärde b_j enheter och standardavvikelse σ_j enheter.
- Den transporterade mängden bestäms innan utfallet av efterfrågan är känd.
- Extra enheter kan vid behov införskaffas till kund j för d_j kronor per enhet.

Hur kan detta inkluderas i modellen?

Stokastisk programmeringsformulering

Diskretisera i S utfall där utfall s har sannolikhet p_s och efterfrågan hos kund j är b_{js} . Låt y_{js} svara mot inköpt mängd till kund j för scenario s .

Formulering som ett stokastiskt programmeringsproblem:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n d_j \sum_{s=1}^S p_s y_{js} \\ \text{då} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} + y_{js} \geq b_{js}, \quad j = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, S, \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \\ & y_{js} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, S. \end{aligned}$$

Exempelproblem med heltalskrav

Antag exempelproblemet med följande utvidgning av modellen:

- Högst k fabriker får användas till den aktuella varan.

Hur kan detta inkluderas i modellen?

Linjär heltalsprogrammeringsformulering

Låt z_i vara binär variabel, där $z_i = \begin{cases} 1 & \text{om fabrik } i \text{ används,} \\ 0 & \text{om fabrik } i \text{ inte används.} \end{cases}$

Formulering som ett linjärt heltalsprogrammeringsproblem:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{då} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i z_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^m z_i \leq k,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Linjärprogrammering

Linjärprogrammering det “centrala” i kursen:

$$\min \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{då} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Vektorform:

$$\min \quad c^T x$$

$$\text{då} \quad Ax = b,$$

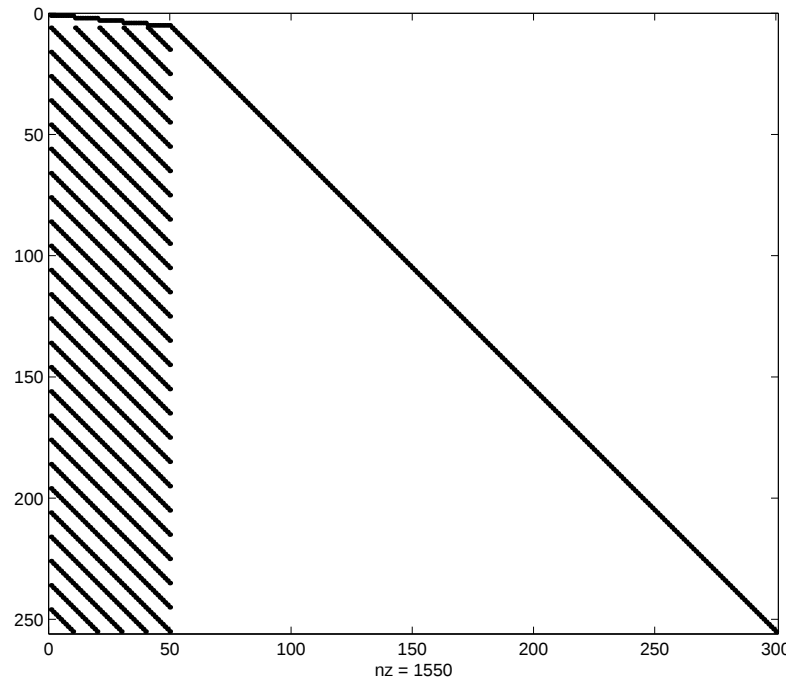
$$x \geq 0.$$

Ovanstående form kallas *standardform*.

Struktur hos linjärprogrammeringsproblem

Låt $m = 5$, $n = 10$ och $S = 25$ i det stokastiska transportproblemet.

Bivillkorsmatrisen A blir:



Gles matris med speciell struktur.

Gles A är karakteristiskt för linjärprogrammeringsproblem.

Heltalsprogrammering och stokastisk programmering

- Linjärprogrammering:

$$\min \quad c^T x$$

$$\text{då} \quad Ax = b,$$

$$x \geq 0.$$

- Heltalsprogrammering:

Komponenter av x måste anta heltalsvärden.

- Stokastisk programmering:

Komponenter av c , A och/eller b innehåller stokastiska data.

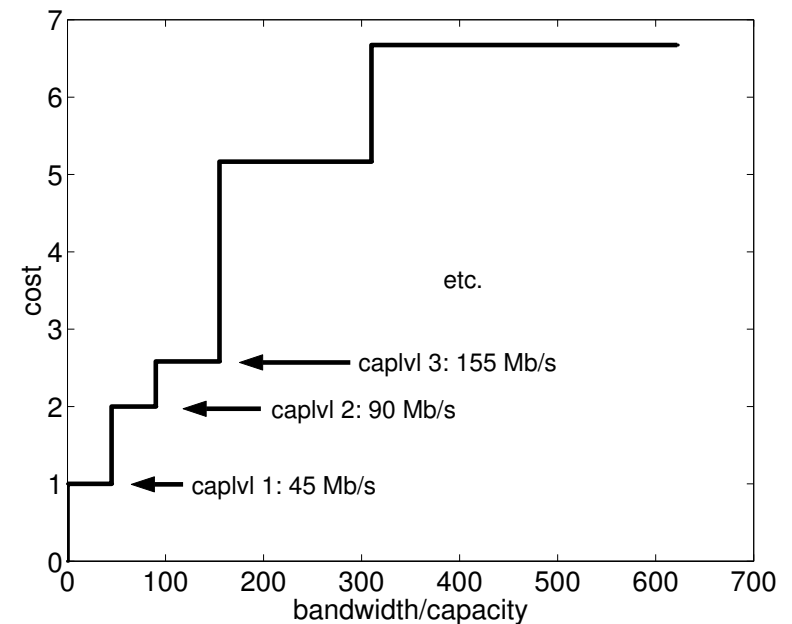
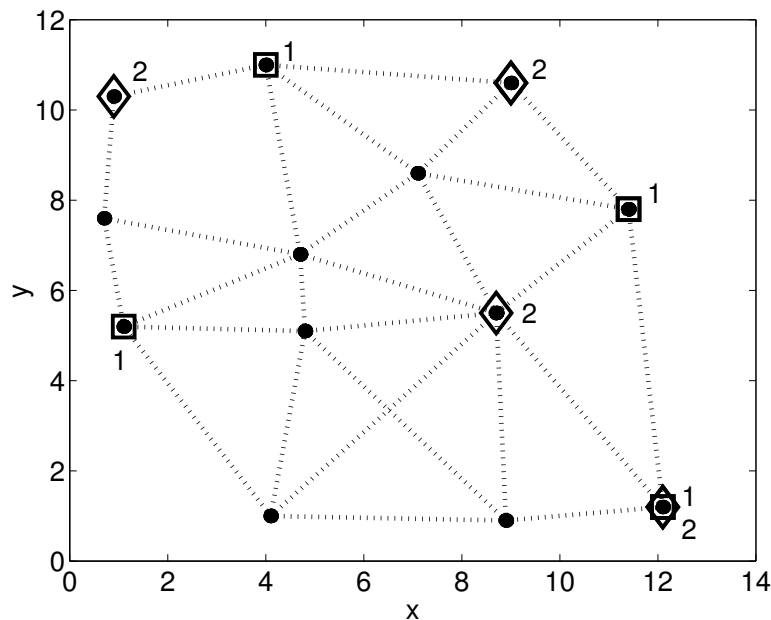
Tillämpningsområden

Exempel på tillämpningar:

- Flygbolags planering av besättningar och flygplan.
- Dimensionering av telekommunikationsnät.
- Drift av kraftverk.
- ...

Dimensionering av telekommunikationsnät

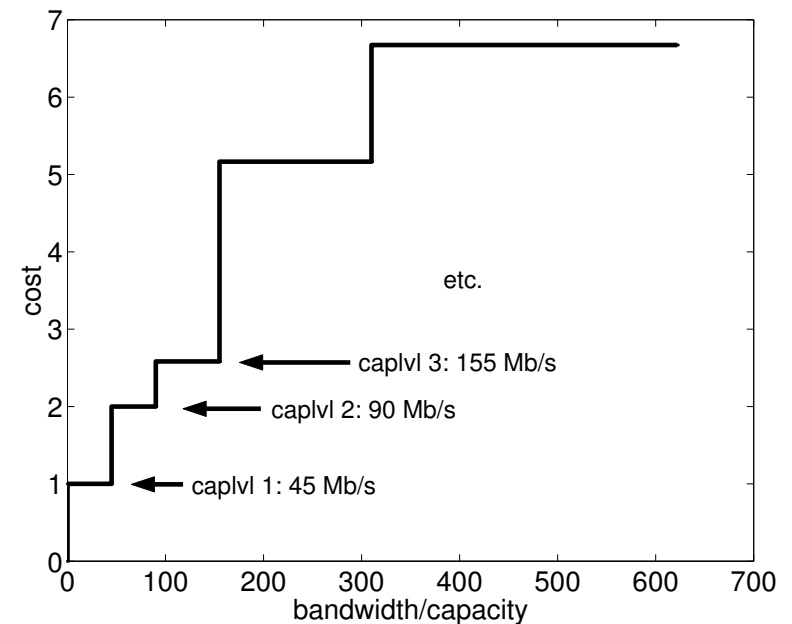
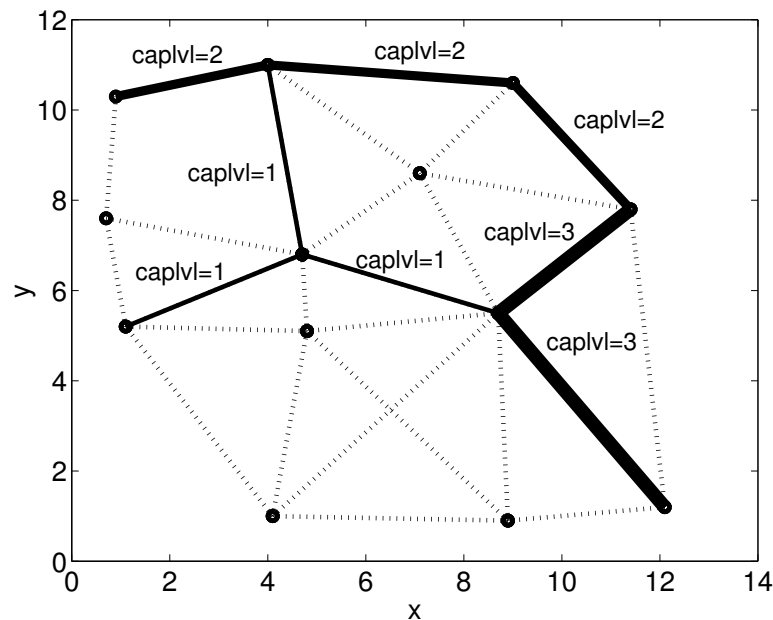
Exempelproblem:



Industridoktorandprojekt, KTH och Ericsson.

Dimensionering av telekommunikationsnät

Exempelproblem:



Industridoktorandprojekt, KTH och Ericsson.

Kursens fokus

Fokus:

- Modeller. Examination genom projekt.
- Metoder. Examination genom tentamen.

Kurskrav:

- Kursanmälan senast 7/9. Ange e-postadress.
- Två projektuppgifter godkända under kursens gång. (2p)
- Godkänd skriftlig tentamen. (3p)

Projektuppgifterna

Projekten:

- Självständig del av kursen.
- Grupper om tre personer. Kursledningen bestämmer gruppindelning.
- Modelleringspråket GAMS används. Introduktionslektion 11/9.
Handledd övning i datorsal 13/9.
- Muntlig och skriftlig redovisning.

Projektuppgifterna, forts.

Projektuppgift 1:

- Delas ut 11/9.
- Skriftlig rapport lämnas in 25/9. Obligatorisk närvaro vid detta tillfälle. Tre grupper redovisar muntligt här, 20 minuter var.
- Vilka grupper som redovisar anslås 18/9. Grupper som inte redovisar muntligt ska boka tider för muntlig diskussion med kursledarna, 20 minuter, senast vid lektionstillfället 25/9. Tider finns (preliminärt) 26/9 och 27/9.

Projektuppgift 2 är analog med redovisningsdatum 9/10.

Två “öppna” projektlektioner, 18/9 respektive 2/10.