KTH Matematik

5B1815 Tillämpad linjär optimering

Föreläsning 10

Lagrangerelaxering. Dualitet.

Behov av alternativ relaxering för heltalsprogrammering

Trädsökning med LP-relaxering i noderna är “standardangreppssättet” för ett heltalsprogrammeringsproblem.

För vissa problem eller problemformuleringar kan detta fungera mindre bra då LP-relaxeringen ger en dålig undre gräns till optimalvärdet.

Exempel:

# vägar	z_{LP}	z_{IP}	# it	tol
1	324.5	498	2192	0
2	324.5	649	665	0
3	354.7	1200	1000000	61

Vad kan vi göra då?

En idé kan vara att basera lösandet på annan relaxering än LP-relaxering.

Vi kommer att studera lagrangerelaxering.

Lagrangerelaxering

$$(P)\quad \begin{array}{lll} \text{min} & f(x) & \\ \text{då} & g_i(x) \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}, & \mathcal{I} \bigcup \mathcal{E} = \{1, \dots, m\}, \\ & g_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E}, & \mathcal{I} \bigcap \mathcal{E} = \emptyset. \\ & x \in X, & \end{array}$$

För $\lambda \in I\!R^m$ definieras *lagrangefunktionen* $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$.

För ett givet $\lambda \in I\!R^m$ sådant att $\lambda_i \geq 0$, $i \in \mathcal{I}$, ges det *lagrangerelaxerade problemet* av

$$(P_\lambda)\quad \begin{array}{ll} \text{min} & f(x) - \lambda^T g(x) \\ \text{då} & x \in X. \end{array}$$

OBS! Parametern λ är fix då (P_λ) löses, x är variabeln.

Lagrangedualitet

Det *lagrangeduala* problemet (D) fås genom att göra lagrangerelaxeringen så stark som möjligt.

$$(D)\quad \begin{array}{ll} \text{max} & \varphi(\lambda) \\ \text{då} & \lambda \in I\!R^m, \quad \lambda_i \geq 0, \ i \in \mathcal{I}, \end{array}$$

där

$$\varphi(\lambda) = \min_{x \in X} \ f(x) - \lambda^T g(x).$$

Svag dualitet. *Optimalvärdena uppfyller* optval$(D) \leq$ optval(P). *Skillnaden* optval(P) − optval(D) *kallas* dualitetsgapet.

Observera att ett bivillkor antingen kan tillhöra g eller X. Olika val kan ge olika dualer med olika dualitetsgap.

Det lagrangeduala problemet

Påstående. *Det duala problemet (D) har konvext tillåtet område och konkav målfunktion på tillåtna området.*

Bevis. För att visa konkavitet av målfunktionen, tag $\alpha \in [0,1]$, $\lambda_1 \in I\!R^m$ och $\lambda_2 \in I\!R^m$. Vi får

$$\begin{aligned}\varphi((1-\alpha)\lambda_1 + \alpha\lambda_2) &= \min_{x\in X} \{f(x) - ((1-\alpha)\lambda_1 + \alpha\lambda_2)^T g(x)\} \\ &\ge (1-\alpha) \min_{x\in X} \{f(x) - \lambda_1^T g(x)\} \\ &+ \alpha \min_{x\in X} \{f(x) - \lambda_2^T g(x)\} \\ &= (1-\alpha)\varphi(\lambda_1) + \alpha\varphi(\lambda_2).\end{aligned}$$

$\square$

Ett dualt problem till LP-problem på standardform

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \text{min} & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \quad x \ge 0. \end{array}$$

Låt $g(x) = Ax - b$, $\mathcal{E} = \{1, \dots, m\}$, $\mathcal{I} = \emptyset$, $X = \{x : x \ge 0\}$.

För ett givet $y \in I\!R^m$ får vi

$$\varphi(y) = \min_{x\ge 0} \ c^T x - y^T(Ax - b) = \begin{cases} b^T y & \text{om } A^T y \le c, \\ -\infty & \text{annars.} \end{cases}$$

Följaktligen,

$$(D) \qquad \begin{array}{ll} \text{max} & b^T y \\ \text{då} & A^T y \le c. \end{array}$$

Ett alternativt dualt problem till LP-problem på standardform

Alternativt, låt $g(x) = \begin{pmatrix} Ax - b \\ x \end{pmatrix}$, $\mathcal{E} = \{1, \dots, m\}$, $\mathcal{I} = \{m+1, \dots, m+n\}$, $X = I\!R^n$.

För givna $y \in I\!R^m$, $s \in I\!R^n$, $s \ge 0$, får vi

$$\varphi(y, s) = \min_{x\in I\!R^n} \ c^T x - y^T(Ax - b) - s^T x = \begin{cases} b^T y & \text{om } A^T y + s = c, \\ -\infty & \text{annars.} \end{cases}$$

Följaktligen,

$$(D') \qquad \begin{array}{ll} \text{max} & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \ge 0. \end{array}$$

Lagrangedualitet för linjärprogrammeringsproblem

Betrakta LP-problemet

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \text{min} & c^T x \\ \text{då} & Ax \ge b, \\ & Cx \ge d, \\ & x \ge 0. \end{array}$$

Låt $g(x) = Ax - b$, $\mathcal{E} = \emptyset$, $\mathcal{I} = \{1, \dots, m\}$, $X = \{x \in I\!R^n : Cx \ge d, x \ge 0\}$. Då blir duala problemet

$$(DLP) \qquad \begin{array}{ll} \text{max} & \varphi_{LP}(u) \\ \text{då} & u \ge 0, \end{array}$$

där $\varphi_{LP}(u) = \min\{c^T x + u^T(b - Ax) : Cx \ge d, x \ge 0\}$.

Lagrangedualitet för linjärprogrammeringsproblem, forts.

Tillämpning av stark dualitet för LP-problem ger

$$\begin{aligned}
\max_{u\ge 0}\ \varphi_{LP}(u) &= \max_{u\ge 0}\left\{\begin{array}{lll} b^Tu+ & \min & (c-A^Tu)^Tx \\ & \text{då} & Cx\ge d,\ x\ge 0, \end{array}\right\} \\
&= \max_{u\ge 0}\left\{\begin{array}{lll} b^Tu+ & \max & d^Tv \\ & \text{då} & C^Tv\le c-A^Tu,\ v\ge 0, \end{array}\right\} \\
&= \begin{array}{ll} \max & b^Tu+d^Tv \\ \text{då} & A^Tu+C^Tv\le c, \\ & u\ge 0,\ v\ge 0, \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ll} \min & c^Tx \\ \text{då} & Ax\ge b, \\ & Cx\ge d,\ x\ge 0. \end{array}
\end{aligned}$$

För LP-problem kan dualen se olika ut, men tack vare stark dualitet får vi samma resultat vilka bivillkor som än relaxeras.

Lagrangedualitet för heltalsprogrammeringsproblem

$$(IP)\qquad \begin{array}{ll} \min & c^Tx \\ \text{då} & Ax\ge b, \\ & Cx\ge d, \\ & x\ge 0,\ x \text{ heltalig.} \end{array}$$

Låt $g(x)=Ax-b$, $\mathcal{E}=\emptyset$, $\mathcal{I}=\{1,\dots,m\}$, $X=\{x\in I\!R^n : Cx\ge d,\ x \text{ heltalig}\}$. Då blir duala problemet

$$(D)\qquad \begin{array}{ll} \max & \varphi(u) \\ \text{då} & u\ge 0, \end{array}$$

där $\varphi(u)=\min\{c^Tx+u^T(b-Ax) : Cx\ge d, x\ge 0 \text{ heltal}\}$.

Relaxering av heltalsprogrammeringsproblem

Låt z med subskript beteckna optimalvärdet till respektive problem, exempelvis låt z_{IP} beteckna optimala målfunktionsvärdet till (IP).

Påstående. *Det gäller att* $z_{IP}\ge z_D\ge z_{LP}$.

Bevis. Fisher, artikel i Interfaces, sid. 13 (i kompletteringsbunten). Idé:

(i) (D) dual till $(IP) \Rightarrow z_D\le z_{IP}$.

(ii) $\varphi_{LP}(u)\le\varphi(u) \Rightarrow z_{DLP}\le z_D$.

(iii) Vi har ovan visat $z_{DLP}=z_{LP}$. $\square$

Det lagrangeduala problemet ger alltså alltid minst lika bra underskattning av z_{IP} som LP-relaxeringen.

Om $\varphi_{LP}(u)=\varphi(u)$ för $u\ge 0$ säger vi att lagrangerelaxeringen har *heltalsegenskapen*. Då ger lagrangedualen inte bättre underskattning än LP-relaxeringen. Ex, $\{x : Cx\ge d,\ x\ge 0\}$ har heltaliga extrempunkter.

Exempelproblem

Exempelproblem (Fisher):

$$\begin{array}{ll} \min & -16x_1-10x_2-4x_4 \\ \text{då} & -8x_1-2x_2-x_3-4x_4\ge -10, \\ & -x_1-x_2\ge -1, \\ & -x_3-x_4\ge -1, \\ & x_j\in\{0,1\},\quad j=1,\dots,4. \end{array}$$

Två "naturliga" relaxeringar:

1. Relaxera bivillkor 1.

2. Relaxera bivillkor 2 och 3.

Lagrangerelaxering av bivillkor 1 i exempelproblemet

Antag att bivillkoret $-8x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 \geq -10$ lagrangerelaxeras med motsvarande multiplikator u.

Det duala problemet ges av

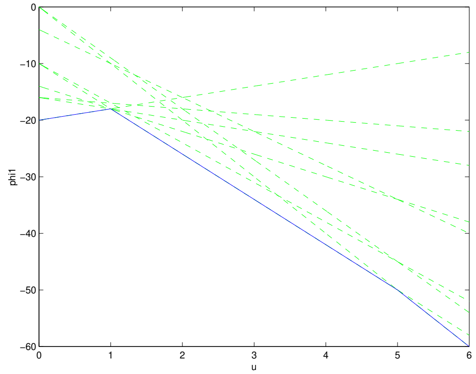
$$(D_1) \quad \begin{array}{ll} \max & \varphi_1(u) \\ \text{då} & u \geq 0, \end{array} \quad \text{där}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(u) = \; & \min \; -16x_1 - 10x_2 - 4x_4 + u(8x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - 10) \\
& \text{då} \quad x_1 + x_2 \leq 1, \; x_3 + x_4 \leq 1, \; x_j \in \{0,1\}, \; j = 1, \dots, 4, \\
= \; & -10u - \max \; (16 - 8u)x_1 + (10 - 2u)x_2 - ux_3 + (4 - 4u)x_4 \\
& \qquad \text{då} \quad x_1 + x_2 \leq 1, \; x_3 + x_4 \leq 1, \\
& \qquad \qquad x_j \in \{0,1\}, \; j = 1, \dots, 4.
\end{aligned}$$

Denna relaxering har heltalsegenskapen.

Geometrisk illustration av duala problemet 1 i exempelproblemet

Det endimensionella duala problemet (D_1) kan illustreras grafiskt:



Vi ser att $u^* = 1$ och $z_{D_1} = \varphi_1(u^*) = -18$.

Lagrangerelaxering av bivillkor 2 och 3 i exempelproblemet

Antag att bivillkoren $-x_1 - x_2 \geq -1$ och $-x_3 - x_4 \geq -1$ lagrangerelaxeras med motsvarande multiplikatorer v_1 och v_2.

Det duala problemet ges av

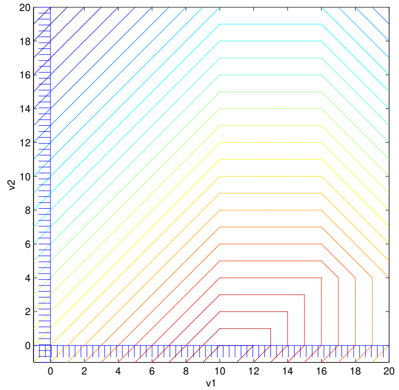
$$(D_2) \quad \begin{array}{ll} \max & \varphi_2(v) \\ \text{då} & v \geq 0, \end{array} \quad \text{där}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(v) = \; & \min \; -16x_1 - 10x_2 - 4x_4 + v_1(x_1 + x_2 - 1) + v_2(x_3 + x_4 - 1) \\
& \text{då} \quad 8x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 10, \; x_j \in \{0,1\}, \; j = 1, \dots, 4, \\
= \; & -v_1 - v_2 - \max \; (16 - v_1)x_1 + (10 - v_1)x_2 - v_2x_3 + (4 - v_2)x_4 \\
& \qquad \text{då} \quad 8x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 10, \\
& \qquad \qquad x_j \in \{0,1\}, \; j = 1, \dots, 4.
\end{aligned}$$

För att evaluera $\varphi_2(v)$ behöver ett kappsäcksproblem lösas.

Geometrisk illustration av duala problemet 2 i exempelproblemet

Det tvådimensionella duala problemet (D_2) kan illustreras grafiskt:



Vi ser att $v_1^* \in [10, 12]$, $v_2^* = 0$ och $z_{D_2} = \varphi_2(v^*) = -16$.

LP-relaxering och lagrangerelaxering

För exempelproblemet har vi $z_{D_1} = -18$, $z_{D_2} = -16$ och $z_{LP} = -18$.

En optimal lösning till (IP) ges av $x^* = (1\ 0\ 0\ 0)^T$ eftersom x^* är tillåten till (IP) med målfunktionsvärde -16.

För att lagrangerelaxering ska vara intressant ska z_D vara väsentligt bättre än z_{LP} samtidigt som (D) ska vara väsentligt lättare att lösa än (IP). I allmänhet motstridiga mål.

Vi har ovan löst två små duala problem till heltalsprogrammeringsproblem grafiskt, men behöver studera metoder för att lösa dessa problem generellt.

De duala problemen till heltalsprogrammeringsproblem får styckvis linjär målfunktion.

Vi kommer nästa gång att studera *subgradientmetoder*.