KTH Matematik

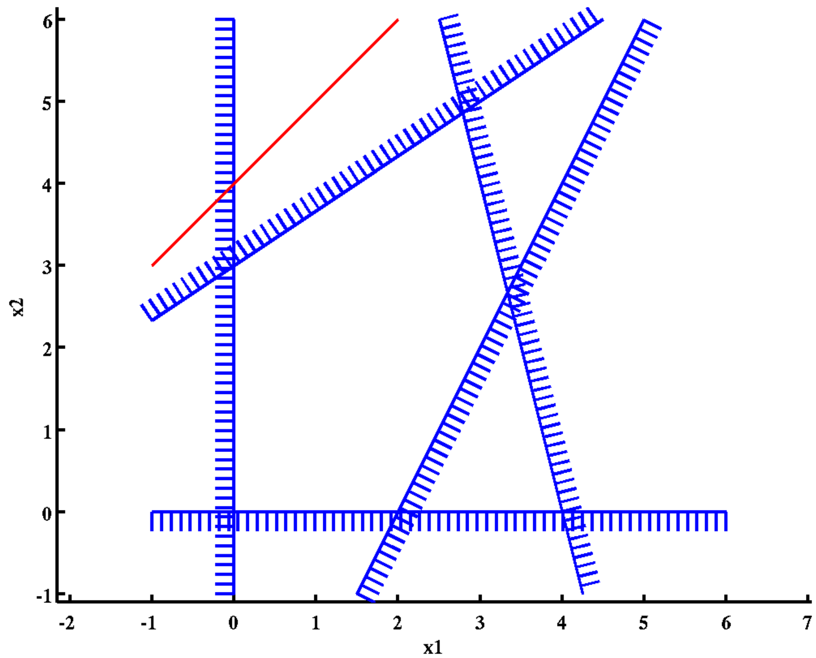
5B1815 Tillämpad linjär optimering

Föreläsning 2

Linjärprogrammering. Simplexmetoden.

Exempelproblem linjärprogrammering

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & -x_1 + x_2 \\
\text{då} & -2x_1 + x_2 \geq -4, \\
 & 2x_1 - 3x_2 \geq -9, \\
 & -4x_1 - x_2 \geq -16, \\
 & x_1 \geq 0, \\
 & x_2 \geq 0.
\end{array}
$$



Exempelproblem linjärprogrammering, forts.

Ekvivalenta linjärprogrammeringsproblem.

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & -x_1 + x_2 \\
\text{då} & -2x_1 + x_2 \geq -4, \\
& 2x_1 - 3x_2 \geq -9, \\
& -4x_1 - x_2 \geq -16, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & -x_1 + x_2 \\
\text{då} & -2x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\
& 2x_1 - 3x_2 - x_4 = -9, \\
& -4x_1 - x_2 - x_5 = -16, \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 5.
\end{array}
$$

Exempelproblem linjärprogrammering, forts.

Ekvivalenta linjärprogrammeringsproblem.

$$
\begin{array}{ll}
\min & -x_1 + x_2 \\
\text{då} & -2x_1 + x_2 \geq -4, \\
& 2x_1 - 3x_2 \geq -9, \\
& -4x_1 - x_2 \geq -16, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\min & -x_1 + x_2 \\
\text{då} & 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\
& -4x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\
& 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 5.
\end{array}
$$

Metoder för linjärprogrammering

Vi ska studera två typer av metoder för linjärprogrammeringsproblem.

- Simplexmetoden.
  - Kombinatorisk i sin natur.
  - Iterationspunkterna är extrempunkter till tillåtna området.
- Inrepunktsmetoder.
  - Följer approximativt en trajektoria som skapats av en störning av optimalitetsvillkoren.
  - Iterationspunkterna ligger i det relativa inre av tillåtna området.

Linjärprogrammeringsproblem på standardform

Vi kommer genomgående att studera linjärprogrammeringsproblem på *standardform*, dvs

$$\begin{array}{ll} \text{min} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{då} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{array}$$

Med vektornotation får vi

$$\begin{array}{ll} \text{min} & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Genomgående antas att A har full radrang.

Standardform och olikhetsform

Vi kommer att studera linjärprogrammeringsproblem på standardform,

$$\begin{array}{ll} \text{min} & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Genom att partitionera $A = (B\ N)$ där B är $m \times m$ och inverterbar får vi

$$\begin{array}{ll} \text{min} & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{då} & B x_B + N x_N = b, \\ & x_B \geq 0, \quad x_N \geq 0. \end{array}$$

Standardform och olikhetsform, forts.

Vi kommer att studera linjärprogrammeringsproblem på standardform,

$$\begin{array}{ll} \text{min} & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Eliminering av x_B som $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ ger

$$\begin{array}{ll} \text{min} & (c_N - N^T B^{-T} c_B) x_N \\ \text{då} & -B^{-1}Nx_N \geq -B^{-1}b, \\ & x_N \geq 0. \end{array}$$

Ekvivalent problem på olikhetsform.

Tillåtna baslösningar

Om vi låter n linjärt oberoende bivillkor vara aktiva, där alla likhetsbivillkoren är inkluderade, får vi en *baslösning* $x = (x_B^T \; x_N^T)^T$ som ges av

$$\begin{pmatrix} B & N \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Partitioneringen $A = (B \;\; N)$ bestäms av vilka $n - m$ bivillkor ur $x \geq 0$ som sätts aktiva. Bivillkoren $x_B \geq 0$ ignoreras.

Baslösningen är en *tillåten baslösning* om $x_B \geq 0$.

Tillåtna baslösningarna är *extrempunkterna* till tillåtna området.

Optimalitet av tillåten baslösning

Antag att vi har en tillåten baslösning

$$\begin{pmatrix} B & N \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Påstående. *Baslösningen är optimal om* $c^T p^i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n-m$, *där* p^i *ges av*

$$\begin{pmatrix} B & N \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_B^i \\ p_N^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n-m.$$

Bevis. Om y är tillåten måste gälla att $y - x = \sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i p^i$, där $\gamma_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n-m$. Alltså blir $c^T(y-x) \geq 0$. $\square$

Test av optimalitet av tillåten baslösning

Notera att c^Tp^i kan skrivas som

$$c^Tp^i = \begin{pmatrix} c_B^T & c_N^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & N \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ e_i \end{pmatrix}.$$

Låt y och s_N lösa $\begin{pmatrix} B^T & 0 \\ N^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ s_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}.$

Då blir $c^Tp^i = \begin{pmatrix} y^T & s_N^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e_i \end{pmatrix} = (s_N)_i.$

Vi kan alltså beräkna c^Tp^i, $i = 1, \ldots, n-m$, genom att lösa *ett* ekvationssystem.

En iteration i simplexmetoden

- Beräkna simplexmultiplikatorer y och reducerade kostnader s ur

$$\begin{pmatrix} B^T & 0 \\ N^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ s_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}.$$

- Om $(s_N)_t < 0$, beräkna sökriktning p ur

$$\begin{pmatrix} B & N \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_B \\ p_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_t \end{pmatrix}.$$

- Beräkna maximala steglängden $\alpha_{\max}$ och begränsande bivillkoret r ur

$$\alpha_{\max} = \min_{i:(p_B)_i<0} \frac{(x_B)_i}{-(p_B)_i}, \quad r = \operatorname*{argmin}_{i:(p_B)_i<0} \frac{(x_B)_i}{-(p_B)_i}.$$

- Låt $x = x + \alpha_{\max} p$.

- Ersätt $(x_N)_t = 0$ med $(x_B)_r = 0$ bland de aktiva bivillkoren.

En iteration i simplexmetoden, alternativt

- Beräkna simplexmultiplikatorer y och reducerade kostnader s ur

$$B^T y = c_B, \quad s_N = c_N - N^T y.$$

- Om $(s_N)_t < 0$, beräkna sökriktning p ur

$$p_N = e_t, \quad Bp_B = -N_t.$$

- Beräkna maximala steglängden $\alpha_{\max}$ och begränsande bivillkoret r ur

$$\alpha_{\max} = \min_{i:(p_B)_i<0} \frac{(x_B)_i}{-(p_B)_i}, \quad r = \operatorname*{argmin}_{i:(p_B)_i<0} \frac{(x_B)_i}{-(p_B)_i}.$$

- Låt $x = x + \alpha_{\max} p$.

- Ersätt $(x_N)_t = 0$ med $(x_B)_r = 0$ bland de aktiva bivillkoren.

Att hitta en tillåten baslösning

För att hitta tillåten baslösning kan man bilda så kallat *Fas I-problem*

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & e^T u \\
\text{då} & Ax + u = b, \\
& x \geq 0, \quad u \geq 0,
\end{array}
$$

där e har alla komponenter 1.

Vi antar att $b \geq 0$. (Om inte kan motsvarande rader i $Ax = b$ multipliceras med -1.)

Tillåten baslösning till Fas I-problemet fås då med u som basvariabler.

Lös sedan Fas I-problemet med simplexmetoden. Om optimalvärdet är noll får vi tillåten baslösning till ursprungsproblemet, annars saknar ursprungsproblemet tillåtna lösningar.

Simplexmetoden

- Primal simplexmetod framställd här. Baslösningen x är tillåten till (PLP). Motsvarande y och s uppfyller $A^T y + s = c$ samt komplementär slack $x^T s = 0$. Däremot $s \geq 0$ endast i optimum.
- Simplexmetoden behöver en initial tillåten baslösning. Kan fås med Fas I-problem.
- Simplexmetoden terminerar garanterat om $\alpha_{\text{max}} > 0$ i alla iterationer. Fallet $\alpha_{\text{max}} = 0$ kan inträffa om fler än n bivillkor är aktiva. Detta kallas *degeneration*. *Anticyklingsstrategi* krävs för att garantera konvergens om $\alpha_{\text{max}} = 0$.
- Simplexmetoden tar ett polynomiellt antal iterationer "i allmänhet".
- Man kan skapa "elaka" (konstruerade) problem där simplexmetoden kräver ett exponentiellt antal iterationer eller cyklar.

Exempel på degenererat linjärprogrammeringsproblem

Ett tilldelningsproblem kan skrivas på följande form:

$$
\begin{array}{lll}
\text{min} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, & i = 1,\dots,n, \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, & j = 1,\dots,n-1, \\
& x_{ij} \ge 0, & i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,n.
\end{array}
$$

Bivillkorsmatrisen har rang $2n-1$. En tillåten bas har n basvariabler med värde 1 och $n-1$ basvariabler med värde 0.

Strukturellt degenererat.