KTH Matematik

5B1815 Tillämpad linjär optimering

Föreläsning 3

Lagrangerelaxering. Dualitet. LP-optimalitet.

Relaxering

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{min} & f(x) \\ \text{då} & x \in F, \end{array} \qquad\qquad (P_R) \quad \begin{array}{ll} \text{min} & f_R(x) \\ \text{då} & x \in F_R. \end{array}$$

Definition. *Problem* (P_R) *är en* relaxering *av problem* (P) *om*

$$(i) \;\; F_R \supseteq F, \quad \textit{och} \quad (ii) \;\; f_R(x) \le f(x) \text{ för alla } x \in F.$$

Påstående. *Optimalvärdena uppfyller* optval$(P_R) \le$ optval(P).

Påstående. *Om* x^* *är en global minpunkt till* (P_R) *sådan att* $x^* \in F$ *och* $f_R(x^*) = f(x^*)$, *så är* x^* *en global minpunkt till* (P).

Lagrangerelaxering

$$
(P) \quad \begin{array}{lll}
\text{min} & f(x) & \\
\text{då} & g_i(x) \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}, & \mathcal{I} \bigcup \mathcal{E} = \{1, \dots, m\}, \\
 & g_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E}, & \mathcal{I} \bigcap \mathcal{E} = \emptyset. \\
 & x \in X, &
\end{array}
$$

För $y \in I\!R^m$ definieras *lagrangefunktionen* $\mathcal{L}(x, y) = f(x) - y^T g(x)$. För ett givet $y \in I\!R^m$ sådant att $y_i \geq 0$, $i \in \mathcal{I}$, ges det *lagrangerelaxerade problemet* av

$$
(P_y) \quad \begin{array}{ll}
\text{min} & f(x) - y^T g(x) \\
\text{då} & x \in X.
\end{array}
$$

OBS! Parametern y är fix då (P_y) löses, x är variabeln.

Lagrangedualitet

Det *lagrangeduala* problemet (D) fås genom att göra lagrangerelaxeringen så stark som möjligt.

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \text{max} & \varphi(y) \\ \text{då} & y \in I\!R^m, \quad y_i \geq 0, \ i \in \mathcal{I}, \end{array}$$

där

$$\varphi(y) = \min_{x \in X} \ f(x) - y^T g(x).$$

Svag dualitet. *Optimalvärdena uppfyller* optval$(D) \leq$ optval(P). *Skillnaden* optval$(P) -$ optval(D) *kallas* dualitetsgapet.

Observera att ett bivillkor antingen kan tillhöra g eller X. Olika val kan ge olika dualer. Vi ska se att för linjärprogrammering är dualitetsgapet noll.

Ett dualt problem till LP-problem på standardform

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \text{min} & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \quad x \geq 0. \end{array}$$

Låt $g(x) = Ax - b$, $\mathcal{E} = \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{I} = \emptyset$, $X = \{x : x \geq 0\}$.

För ett givet $y \in I\!R^m$ får vi

$$\varphi(y) = \min_{x \geq 0} \; c^T x - y^T(Ax - b) = \begin{cases} b^T y & \text{om } A^T y \leq c, \\ -\infty & \text{annars.} \end{cases}$$

Följaktligen,

$$(D) \qquad \begin{array}{ll} \text{max} & b^T y \\ \text{då} & A^T y \leq c. \end{array}$$

Ett alternativt dualt problem till LP-problem på standardform

Alternativt, låt $g(x) = \begin{pmatrix} Ax - b \\ x \end{pmatrix}$, $\mathcal{E} = \{1, \dots, m\}$,

$\mathcal{I} = \{m+1, \dots, m+n\}$, $X = I\!R^n$.

För givna $y \in I\!R^m$, $s \in I\!R^n$, $s \geq 0$, får vi

$$\varphi(y, s) = \min_{x \in I\!R^n} \; c^T x - y^T (Ax - b) - s^T x = \begin{cases} b^T y & \text{om } A^T y + s = c, \\ -\infty & \text{annars.} \end{cases}$$

Följaktligen,

$$(D') \qquad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Primala och duala linjärprogrammeringsproblem

Till det *primala* linjärprogrammeringsproblemet

$$(PLP) \qquad \begin{array}{ll} \text{min} & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

hör det *duala* linjärprogrammeringsproblemet

$$(DLP) \qquad \begin{array}{ll} \text{max} & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Svaga dualitetsresultat för linjärprogrammering

Påstående. *Om* x *är tillåten till* (PLP) *och* y, s *är tillåten till* (DLP) *gäller att* $c^T x - b^T y = x^T s \geq 0$.

Bevis. Insättning ger resultatet. □

Påstående. *Om* x *är tillåten till* (PLP) *och* y, s *är tillåten till* (DLP), *samt dessutom* $x^T s = 0$, *så är dessa lösningar optimala till respektive problem.*

Bevis. Följer av föregående påstående. □

Stark dualitet för linjärprogrammering

Betrakta det primala linjärprogrammeringsproblemet

$$(PLP) \qquad \begin{array}{ll} \text{min} & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \quad x \geq 0. \end{array}$$

och det tillhörande duala linjärprogrammeringsproblemet

$$(DLP) \qquad \begin{array}{ll} \text{max} & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \quad s \geq 0. \end{array}$$

Sats. *Om* (PLP) *har en optimallösning, så har även* (DLP) *en optimalitetslösning, och de optimala målfunktionsvärdena är lika.*

Bevis. Konstruktivt med simplexmetoden. (Lite fusk.) $\square$

Linjärprogrammering, optimalitetsvillkor

LP-problem:

$$(PLP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array} \qquad\qquad (DLP) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Optimalitetsvillkor:

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^T y + s &= c, \\ x_j s_j &= 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ x &\geq 0, \\ s &\geq 0. \end{aligned}$$

En iteration i simplexmetoden

- Beräkna simplexmultiplikatorer y och reducerade kostnader s ur

$$B^T y = c_B, \quad s_N = c_N - N^T y.$$

- Om $(s_N)_t < 0$, beräkna sökriktning p ur

$$p_N = e_t, \quad B p_B = -N_t.$$

- Beräkna maximala steglängden α_{max} och begränsande bivillkoret r ur

$$\alpha_{\text{max}} = \min_{i:(p_B)_i<0} \frac{(x_B)_i}{-(p_B)_i}, \quad r = \operatorname*{argmin}_{i:(p_B)_i<0} \frac{(x_B)_i}{-(p_B)_i}.$$

- Låt $x = x + \alpha_{\text{max}} p$.

- Ersätt $(x_N)_t = 0$ med $(x_B)_r = 0$ bland de aktiva bivillkoren.

Linjärprogrammering, optimalitetsvillkor

LP-problem:

$$
(PLP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}
\qquad
(DLP) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}
$$

Partitionera $A = (B \ N)$. Låt $x_N = 0$ och $s_B = 0$. Då blir optimalitetsvillkoren

$$
\begin{aligned}
Bx_B &= b, \\
B^T y = c_B, &\quad N^T y + s_N = c_N, \\
x_B \geq 0, &\quad s_N \geq 0.
\end{aligned}
$$

Simplexmetoden håller alla villkor utom $s_N \geq 0$ uppfyllda hela tiden.

Känslighetsanalys

Vad händer om problemdata ändras? Exempelvis om b och c ändras?

För en given baslösning kan svaret ges "direkt" så länge basen ger primal respektive dual tillåtenhet.

$$\begin{pmatrix} B & N \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}_B \geq 0,$$

$$\begin{pmatrix} B^T & 0 \\ N^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{s}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_B \\ \tilde{c}_N \end{pmatrix}, \quad \tilde{s}_N \geq 0.$$