



KTH Matematik

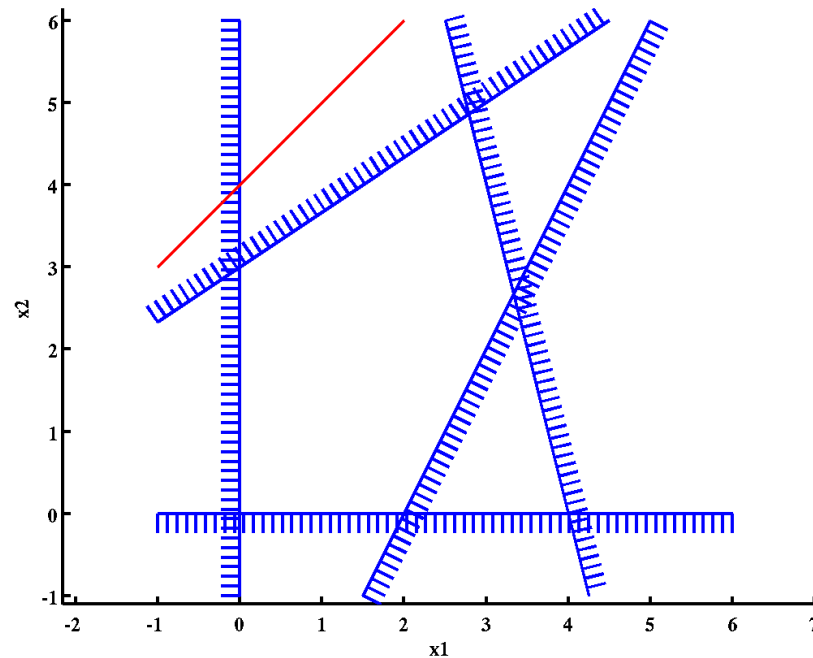
5B1815 Tillämpad linjär optimering

Föreläsning 4

Linjärprogrammering. Geometri.

Exempelproblem linjärprogrammering

$$\begin{array}{ll}\min & -x_1 + x_2 \\ \text{då} & -2x_1 + x_2 \geq -4, \\ & 2x_1 - 3x_2 \geq -9, \\ & -4x_1 - x_2 \geq -16, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0.\end{array}$$



Exempelproblem linjärprogrammering, forts.

Ekvivalenta linjärprogrammeringsproblem.

$$\min \quad -x_1 + x_2$$

$$\text{då} \quad -2x_1 + x_2 \geq -4,$$

$$2x_1 - 3x_2 \geq -9,$$

$$-4x_1 - x_2 \geq -16,$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0.$$

$$\min \quad -x_1 + x_2$$

$$\text{då} \quad -2x_1 + x_2 - x_3 = -4,$$

$$2x_1 - 3x_2 - x_4 = -9,$$

$$-4x_1 - x_2 - x_5 = -16,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.$$

Tillåtna baslösningar

Låt $S = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$. För ett givet $x \in S$, partitionera x som $x = (x_+^T \ x_0^T)^T$ och $A = (A_+ \ A_0)$, där

$$\begin{pmatrix} A_+ & A_0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_+ \geq 0.$$

Definition. En punkt $x \in S$ är en tillåten baslösning om A_+ har linjärt oberoende kolumner.

Alternativt kan $x \in S$ definieras som tillåten baslösning om det inte finns $p \neq 0$ så att

$$\begin{pmatrix} A_+ & A_0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_+ \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Extrempunkter och tillåtna baslösningar

Definition. Låt C vara en konvex mängd. Då är x en extrempunkt till C om $x \in C$ och det inte finns $y \in C$, $z \in C$, $y \neq x$, $z \neq x$, och $\alpha \in (0, 1)$ så att $x = (1 - \alpha)y + \alpha z$.

Sats. En punkt $x \in S$ är en extrempunkt till S om och endast om x är en tillåten baslösning.

Bevis. Se Nash och Sofer, sid. 80–81. $\square$

En extrempunkt till S är alltså en tillåten punkt som är unikt bestämd av de bindande billkoren.

Representationssatsen

Sats. Låt $S = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$. Antag att S har extrempunkter v_i , $i = 1, \dots, k$. Då gäller att

$$S = \left\{ x : x = d + \sum_{i=1}^k v_i \alpha_i, \quad Ad = 0, \quad d \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \quad \alpha \geq 0 \right\} \\ = \left\{ x : x = d + V\alpha, \quad Ad = 0, \quad d \geq 0, \quad e^T \alpha = 1, \quad \alpha \geq 0 \right\},$$

där $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{pmatrix}$ och $e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$.

Bevis. Se Nash och Sofer, sid. 88–89. $\square$

Existens av optimal baslösning

Låt (LP) definieras av

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ (LP) & \text{då } Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

Sats. *Om det finns någon optimallösning till (LP) , så finns det minst en extrempunkt (tillåten baslösning) som är optimal.*