KTH Matematik

5B1815 Tillämpad linjär optimering

Föreläsning 5

Inrepunktsmetoder för linjärprogrammering.

Inrepunktsmetoder för linjärprogrammering

Vi vill lösa linjärprogrammeringsproblemen

$$(PLP) \quad \begin{array}{ll} \text{min} & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \ge 0, \end{array} \qquad\qquad (DLP) \quad \begin{array}{ll} \text{max} & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \ge 0. \end{array}$$

En inrepunktsmetod följer approximativt *barriärtrajektorian* som skapats genom en störning av optimalitetsvillkoren.

För att förstå metoden tittar vi först på trajektorian.

Därefter studerar vi metoden.

Fokus är på primal-duala inrepunktsmetoder.

Det primal-duala ickelinjära ekvationssystemet

Om komplementaritetsvillkoret $x_j s_j = 0$ störs till $x_j s_j = \mu$ för en positiv parameter μ, får vi ett ickelinjärt ekvationssystem på formen

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^T y + s &= c, \\ x_j s_j &= \mu, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Olikheterna $x \geq 0$, $s \geq 0$ hålls "implicit".

Parametern μ kallas *barriärparametern*.

Påstående. *Det primal-duala ekvationssystemet är väldefinierat och har en unik lösning med* $x > 0$ *och* $s > 0$ *för alla* $\mu > 0$ *om* $\{x : Ax = b, x > 0\} \neq \emptyset$ *och* $\{(y, s) : A^T y + s = c, s > 0\} \neq \emptyset$.

Denna lösning betecknas $x(\mu)$, $y(\mu)$ och $s(\mu)$.

Det primal-duala ickelinjära ekvationssystemet, forts.

Det primal-duala ickelinjära ekvationssystemet kan skrivas på vektorform:

$$
\begin{aligned}
Ax &= b, \\
A^T y + s &= c, \\
XSe &= \mu e,
\end{aligned}
$$

där $X = \text{diag}(x)$, $S = \text{diag}(s)$ och $e = (1, 1, \ldots, 1)^T$.

Påstående. *En lösning* $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ *är sådan att* $x(\mu)$ *är tillåten till* (PLP) *och* $y(\mu)$, $s(\mu)$ *är tillåten till* (DLP) *med dualitetsgap* $n\mu$.

Primalt synsätt

Primalt synsätt: $x(\mu)$ löser

$$
(P_\mu) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x - \mu \sum_{j=1}^{n} \ln x_j \\ \text{då} & Ax = b, \quad x > 0, \end{array}
$$

med $y(\mu)$ som Lagrangemultiplikator till $Ax = b$.

Optimalitetsvillkor till (P_μ):

$$
\begin{aligned} c_j - \frac{\mu}{x_j} &= A_j^T y, \quad j = 1, \ldots, n, \\ Ax &= b, \\ x &> 0. \end{aligned}
$$

Dualt synsätt

Dualt synsätt: $y(\mu)$ och $s(\mu)$ löser

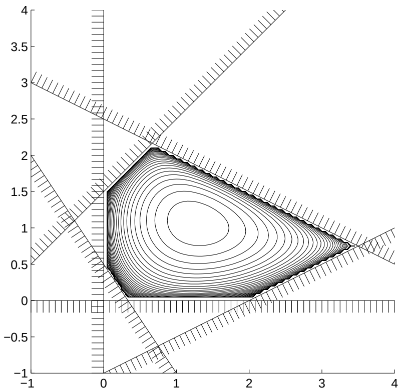
$$
(D_\mu) \qquad \begin{array}{ll} \text{max} & b^T y + \mu \sum_{j=1}^{n} \ln s_j \\ \text{då} & A^T y + s = c, \quad s > 0, \end{array}
$$

med $x(\mu)$ som Lagrangemultiplikator till $A^T y + s = c$.

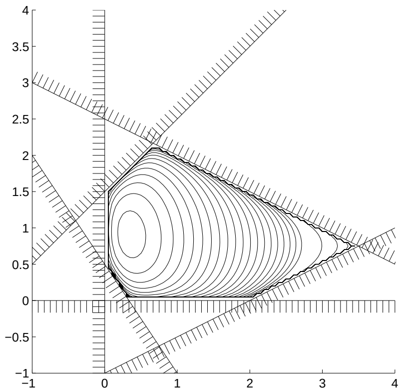
Optimalitetsvillkor till (D_μ):

$$
\begin{aligned}
b &= Ax, \\
\frac{\mu}{s_j} &= x_j, \quad j = 1, \ldots, n, \\
A^T y + s &= c, \\
s &> 0.
\end{aligned}
$$

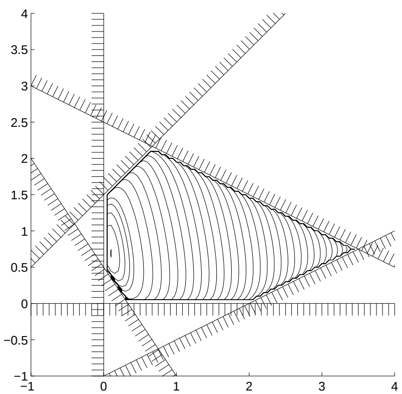
Primal barriärfunktion för exempel-LP



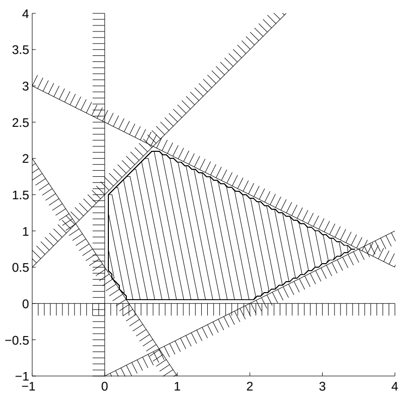
$\mu = 5$



$\mu = 1$



$\mu = 0.3$



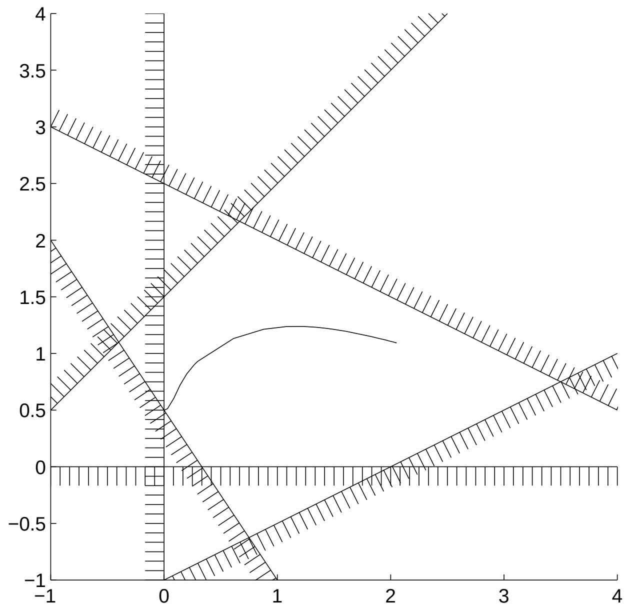
$\mu = 10^{-16}$

Barriärtrajektorian

Barriärtrajektorian definieras som mängden $\{(x(\mu), y(\mu), s(\mu)) : \mu > 0\}$.

Det primal-duala ickelinjära ekvationssystemet är att föredra framför det primala och det duala. Rent primalt och rent dualt synsätt ger stor ickelinjäritet.

Exempel på primal del av barriärtrajektorian:



Egenskaper hos barriärtrajektorian

Sats. *Om barriärtrajektorian är väldefinierad gäller* $\lim_{\mu \to 0} x(\mu) = x^*$, $\lim_{\mu \to 0} y(\mu) = y^*$, $\lim_{\mu \to 0} s(\mu) = s^*$, *där* x^* *är optimallösning till* (PLP), *och* y^*, s^* *är optimallösning till* (DLP).

Barriärtrajektorian konvergerar alltså mot en optimallösning.

Sats. *Om barriärtrajektorian är väldefinierad är* $\lim_{\mu \to 0} x(\mu)$ *optimallösningen till problemet*

$$
\begin{array}{ll}
\min & -\sum_{i \in \mathcal{B}} \ln x_i \\
\textit{då} & \sum_{i \in \mathcal{B}} A_i x_i = b, \quad x_i > 0, \; i \in \mathcal{B},
\end{array}
$$

där $\mathcal{B} = \{i : \widetilde{x}_i > 0$ *för någon optimallösning* $\widetilde{x}$ *till* $(PLP)\}$.

Barriärtrajektorian konvergerar alltså mot en baslösning endast om (PLP) har unik optimallösning.

Primal-dual inrepunktsmetod

Primal-dual inrepunktsmetod baserad på Newton-iterationer på störda optimalitetsvillkoren.

För en given punkt x, y, s, med $x > 0$ och $s > 0$ väljs lämpligt värde på μ. Newton-iterationen blir då

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + s - c \\ XSe - \mu e \end{pmatrix}.$$

Ofta väljs $\mu = \sigma \dfrac{x^T s}{n}$, för något $\sigma \in [0, 1]$.

Observera att $Ax = b$ och $A^T y + s = c$ inte behöver vara uppfyllt i initialpunkten. Uppfyllt i $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $s + \Delta s$.

En iteration i en primal-dual inrepunktsmetod

- Välj värde på μ.
- Beräkna riktningarna Δx, Δy och Δs ur

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + s - c \\ XSe - \mu e \end{pmatrix}.$$

- Beräkna maximala steglängden α_{max} ur $x + \alpha\Delta x \geq 0$, $s + \alpha\Delta s \geq 0$.
- Låt $\alpha = \min\{1, 0.999 \cdot \alpha_{\mathsf{max}}\}$.
- Låt $x = x + \alpha\Delta x$, $y = y + \alpha\Delta y$, $s = s + \alpha\Delta s$.

Strategier för att välja σ

Påstående. *Antag att* x *uppfyller* $Ax = b$, $x > 0$, *att* y, s *uppfyller* $A^T y + s = c$, $s > 0$, *samt* $\mu = \sigma x^T s/n$. *Då gäller*

$$(x + \alpha \Delta x)^T (s + \alpha \Delta s) = (1 - \alpha(1 - \sigma)) x^T s.$$

Det är alltså önskvärt att ha σ liten och α stor. Dessa mål strider i allmänhet mot varandra.

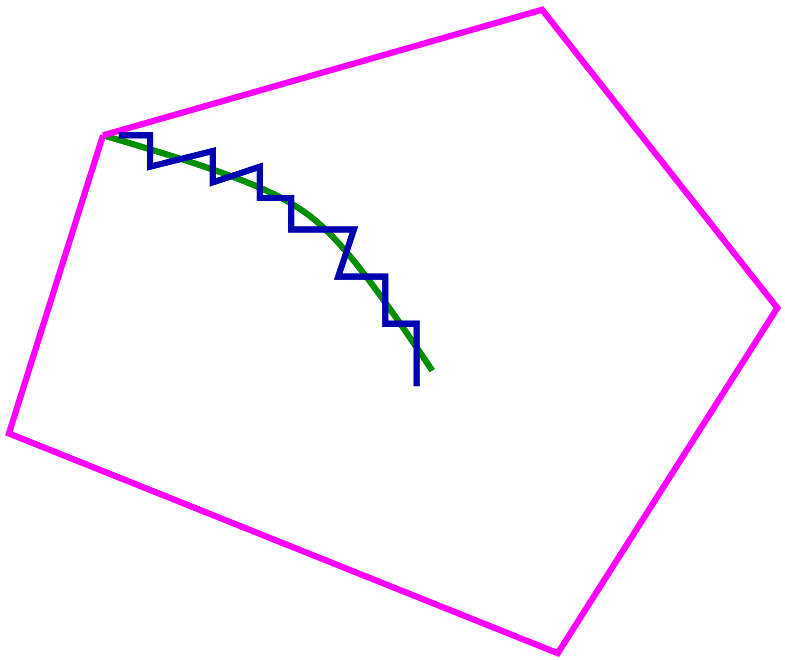
Tre huvudstrategier:

- Kort-stegsmetod, σ nära 1.
- Lång-stegsmetod, σ väsentligt mindre än 1.
- Prediktions-korrektionsmetod, $\sigma = 0$ varje jämn iteration och $\sigma = 1$ varje udda iteration.

Kort-stegsmetod

Vi kan välja $\sigma^k = 1 - \delta/\sqrt{n}$, $\alpha^k = 1$.

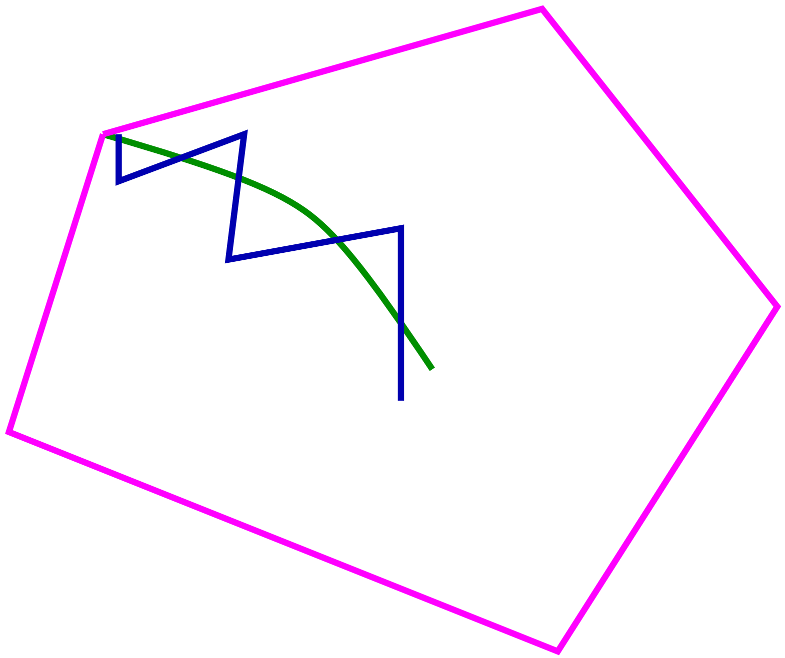
Iterationspunkterna stannar nära trajektorian.



Polynomiell komplexitet. Normalt inte tillräckligt effektiv i praktiken.

Lång-stegsmetod

Vi kan välja $\sigma^k = 0.1$, α^k given av närhet till trajektorian.

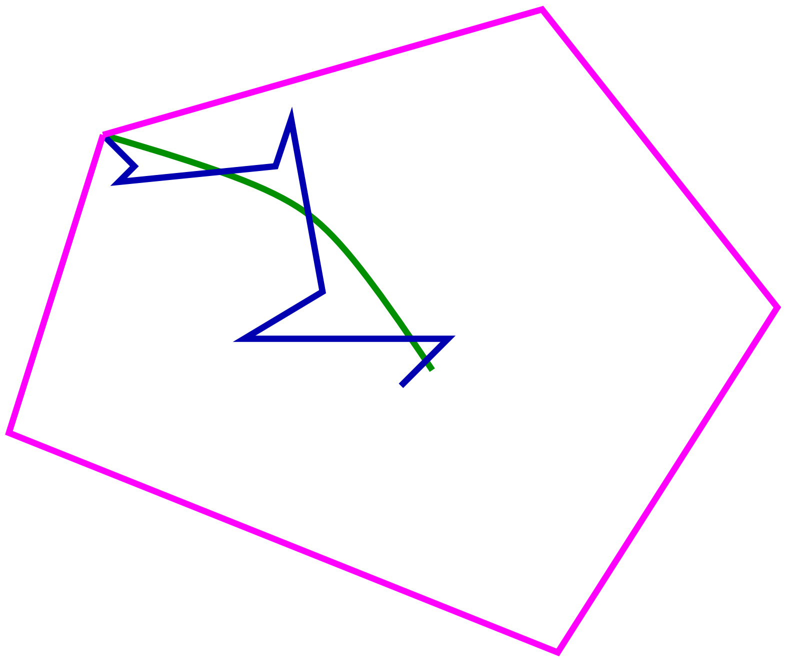


Polynomiell komplexitet.

Prediktions-korrektionsmetod

$\sigma^k = 0$, α^k given av närhet till trajektorian för k jämn.

$\sigma^k = 1$, $\alpha^k = 1$ för k udda.

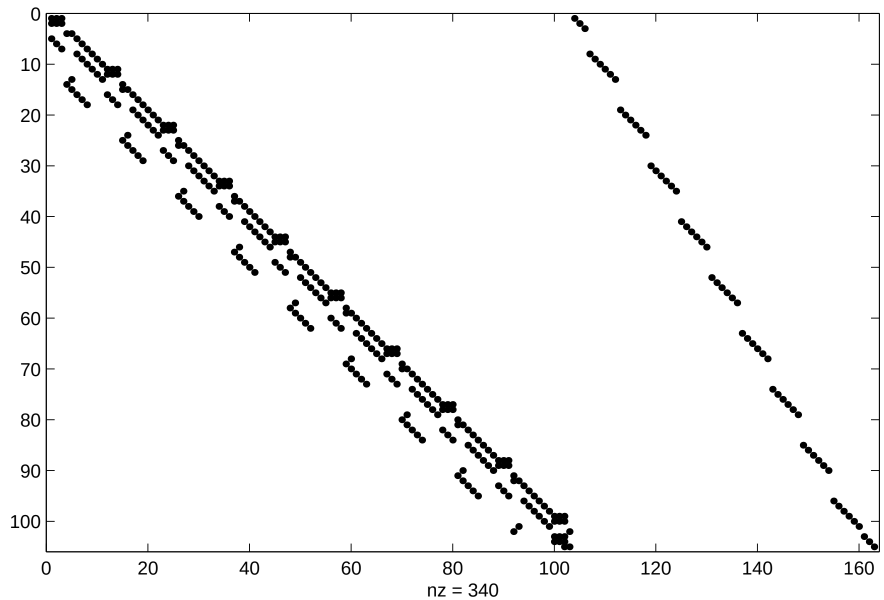


Polynomiell komplexitet.

Uppförande av inrepunktsmetod

Normalt få iterationer, storleksordningen 20. Växer normalt ej med problemstorleken.

Glesa ekvationssystem. Exempel på A:



Iterationerna blir tyngre då storleken ökar.

Oklart hur man kan "varmstarta" metoden effektivt.

Att lösa det linjära ekvationssystem som uppstår

Man vill beräkna Δx, Δy och Δs ur

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + s - c \\ XSe - \mu e \end{pmatrix}.$$

Man kan exempelvis lösa

$$\begin{pmatrix} X^{-1}S & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ -\Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c - \mu X^{-1} e - A^T y \\ Ax - b \end{pmatrix},$$

alternativt

$$AXS^{-1}A^T \Delta y = AXS^{-1}(c - \mu X^{-1} e - A^T y) + b - Ax.$$