KTH Matematik

5B1815 Tillämpad linjär optimering

Föreläsning 6

Stokastisk programmering.

Stokastisk programmering

Betrakta ett linjärprogrammeringsproblem på följande form:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & Tx = h, \\ & x \ge 0. \end{array}$$

Antag att T och h är stokastiska. Hur ska detta hanteras?

Vi antar att x-variablerna måste bestämmas innan utfallet av T och h är känt. Bivillkoret $Tx = h$ går då normalt inte att uppfylla.

Tvåstegsmodell med kompensation

Antag att stokastiken i T och h kan representeras med S scenarios, där scenario s inträffar med sannolikhet p_s, och T och h antar värdena T_s respektive h_s.

Vi kallar x-variablerna förstastegsvariabler.

I ett andra steg kan man *kompensera* för avvikelser i $h_s - T_s x$ genom de ickenegativa andrastegsvariablerna y_s, $s = 1, \dots, S$, och en kompensationsmatris W enligt

$$W y_s = h_s - T_s x, \quad s = 1, \dots, S.$$

Denna kompensation kan ske till en kostnad $d_s^T y_s$.

$$\boxed{\text{Beslut i steg 1 } (x)} \longrightarrow \boxed{\text{Slump}} \longrightarrow \boxed{\text{Beslut i steg 2 } (y_s,\ s = 1, \dots, S)}$$

Enkel kompensation

Exempelvis kan man tänka sig *enkel kompensation*, där

$$y = \begin{pmatrix} y_s^+ \\ y_s^- \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} I & -I \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad d_s = \begin{pmatrix} d_s^+ \\ d_s^- \end{pmatrix}.$$

Detta innebär att

$$y_s^+ - y_s^- = h_s - T_s x, \quad y_s^+ \ge 0, \quad y_s^- \ge 0.$$

Det aggregerade optimeringsproblemet

För scenario s får man den optimala kompensationskostnaden $Q(x,s)$, givet ett visst x enligt

$$\begin{aligned} Q(x,s) = \quad & \min \quad d_s^T y_s \\ & \text{då} \quad W y_s = h_s - T_s x, \\ & \qquad\;\; y_s \geq 0. \end{aligned}$$

Minimering av den förväntade kostnaden ger optimeringsproblemet

$$\begin{aligned} RP = \quad & \min \quad c^T x + \sum_{s=1}^{S} p_s Q(x,s) \\ & \text{då} \quad Ax = b, \\ & \qquad\;\; x \geq 0. \end{aligned}$$

Det aggregerade optimeringsproblemet, forts.

Det aggregerade optimeringsproblemt kan skrivas som ett enda problem:

$$\begin{aligned} RP = \quad & \min \quad c^T x + \sum_{s=1}^{S} p_s d_s^T y_s \\ & \text{då} \quad Ax = b, \\ & \qquad\;\; T_s x + W y_s = h_s, \;\; s = 1, \dots, S, \\ & \qquad\;\; x \geq 0, \\ & \qquad\;\; y_s \geq 0, \;\; s = 1, \dots, S. \end{aligned}$$

RP står för “recourse problem”.

Det aggregerade optimeringsproblemets bivillkorsmatris

Det aggregerade linjärprogrammeringsproblemets bivillkorsmatris blir

$$\begin{pmatrix} A & & & & \\ T_1 & W & & & \\ T_2 & & W & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ T_S & & & & W \end{pmatrix}.$$

Matrisen har *trappstegsstruktur*. Observera att S kan vara mycket stort.

Speciella tekniker kan utnytta strukturen på matrisen.

Vid mycket stora problem kan man tvingas “glesa ut” utfallsrummet.

Ett jordbruksexempel

Exempel ur Birge och Louveaux (i kompletteringsbunten).

En bonde odlar korn, majs och sockerbetor på sina 500 ha land.

Problemdata:

	Korn	Majs	Sockerbetor
Avkastning (ton/ha)	2.5	3	20
Planteringskostnad (€/ha)	150	230	260
Försäljningspris (€/ton)	170	150	36 ($\leq$ 6000 ton) 10 ($>$ 6000 ton)
Inköpspris (€/ton)	238	210	—
Min. efterfrågan (ton)	200	240	—
Tillgängligt land: 500 ha			

Ett jordbruksexempel, forts.

Inför index i, där $\begin{cases} i = 1 \text{ svarar mot korn,} \\ i = 2 \text{ svarar mot majs,} \\ i = 3 \text{ svarar mot sockerbetor.} \end{cases}$

Variabler:

- x_i, hektar land odlat med produkt i, $i = 1, 2, 3$.
- w_i, antal sålda ton till normalpris av produkt i, $i = 1, 2, 3$.
- v_3, antal sålda ton till överskottspris av sockerbetor.
- y_i, antal köpta ton av produkt i, $i = 1, 2, 3$.

Ett jordbruksexempel, forts.

Problemformulering:

$$\begin{array}{ll} \min & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 \\ & +238y_1 - 170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10v_3 \\ \text{då} & x_1 + x_2 + x_3 \le 500, \\ & 2.5x_1 + y_1 - w_1 \ge 200, \\ & 3x_2 + y_2 - w_2 \ge 240, \\ & 20x_3 - w_3 - v_3 \ge 0, \\ & w_3 \le 6000, \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, v_3 \ge 0. \end{array}$$

Ett jordbruksexempel, forts.

Betrakta en enkel stokastisk modell som har korrelerad avkastning för de tre produkterna, antingen hög (+20%), medel (som ovan) eller låg (−20%). Modelleras som $s = 1, 2, 3$. Varje scenario ansätts sannolikhet 1/3.

Odlingen av landet måste bestämmas i förväg: x_i, $i = 1, 2, 3$.

Försäljning och inköp kan bestämmas då avkastningen är känd: w_{is}, $i = 1, 2, 3$, $s = 1, 2, 3$, v_{3s}, $s = 1, 2, 3$, y_{js}, $j = 1, 2$, $s = 1, 2, 3$.

Ett jordbruksexempel, forts.

Problemformulering:

$$\begin{array}{ll} \min & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 \\ & +\frac{1}{3}\sum_{s=1}^{3}(238y_{1s} - 170w_{1s} + 210y_{2s} - 150w_{2s} - 36w_{3s} - 10v_{3s}) \\ \text{då} & x_1 + x_2 + x_3 \le 500, \\ & (1+\alpha_s)2.5x_1 + y_{1s} - w_{1s} \ge 200, \quad s = 1, 2, 3, \\ & (1+\alpha_s)3x_2 + y_{2s} - w_{2s} \ge 240, \quad s = 1, 2, 3, \\ & (1+\alpha_s)20x_3 - w_{3s} - v_{3s} \ge 0, \quad s = 1, 2, 3, \\ & w_{3s} \le 6000, \quad s = 1, 2, 3, \\ & x_1, x_2, x_3, y_{1s}, y_{2s}, w_{1s}, w_{2s}, w_{3s}, v_{3s} \ge 0, \quad s = 1, 2, 3, \end{array}$$

där $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0$ och $\alpha_3 = -0.2$.

Fullständig information

Om man (teoretiskt) kunde vänta på utfallet fås problemet

$$
\begin{aligned}
WS = \textstyle\sum_{s=1}^{S} p_s \cdot \quad \text{min} \quad & c^T x_s + d_s^T y_s \\
\text{då} \quad & A x_s = b, \\
& T_s x_s + W y_s = h_s, \\
& x_s \ge 0, \\
& y_s \ge 0.
\end{aligned}
$$

WS står för “wait and see”.

$\boxed{} \rightarrow \boxed{\text{Slump}} \rightarrow \boxed{\text{Beslut i steg 2 } (x_s,\ y_s,\ s = 1, \dots, S)}$

Förväntade värdet av perfekt information

Förväntade värdet av perfekt information, $EVPI$, fås som skillnaden mellan RP och VS, dvs $EVPI = RP - WS$.

$EVPI$ står för “exptected value of perfect information”.

Ger ett mått på hur mycket det vore värt att ha fullständig information.

RP ges av:

$\boxed{\text{Beslut i steg 1 } (x)} \rightarrow \boxed{\text{Slump}} \rightarrow \boxed{\text{Beslut i steg 2 } (y_s,\ s = 1, \dots, S)}$

WS ges av:

$\boxed{} \rightarrow \boxed{\text{Slump}} \rightarrow \boxed{\text{Beslut i steg 2 } (x_s,\ y_s,\ s = 1, \dots, S)}$

Jordbruksexemplet:
$RP = -€108390$, $WS = -€115406$, $EVPI = €7016$.

Medelvärdesproblemet

Ett “primitivt” sätt är att medelvärdesbilda, vilket ger

$$
\begin{aligned}
EV = \quad \text{min} \quad & c^T x + \bar{d}^T y \\
\text{då} \quad & A x = b, \\
& \bar{T} x + W y = \bar{h}, \\
& x \ge 0, \\
& y \ge 0,
\end{aligned}
$$

där $\bar{d} = \displaystyle\sum_{s=1}^{S} p_s d_s$, $\bar{T} = \displaystyle\sum_{s=1}^{S} p_s T_s$ och $\bar{h} = \displaystyle\sum_{s=1}^{S} p_s h_s$.

EV står för “expected value”.

Låt $\bar{x}$ beteckna optimala x-lösningen till detta problem.

Förväntade resultatet av medelvärdesproblemets lösning

Kompensation för x fixerad till $\bar{x}$ ger optimeringsproblemet

$$
\begin{aligned}
EEV = \quad \text{min} \quad & c^T \bar{x} + \sum_{s=1}^{S} p_s d_s^T y_s \\
\text{då} \quad & A \bar{x} = b, \\
& T_s \bar{x} + W y_s = h_s, \quad s = 1, \dots, S, \\
& y_s \ge 0, \quad s = 1, \dots, S.
\end{aligned}
$$

Ekvivalent:

$$
\begin{aligned}
EEV = c^T \bar{x} + \textstyle\sum_{s=1}^{S} p_s \cdot \quad \text{min} \quad & d_s^T y_s \\
\text{då} \quad & W y_s = h_s - T_s \bar{x}, \\
& y_s \ge 0.
\end{aligned}
$$

EEV står för “expected result of using EV solution”.

Förväntade värdet av den stokastiska lösningen

Förväntade värdet av den stokastiska lösningen, VSS, fås som skillnaden mellan EEV och RP, dvs $VSS = EEV - RP$.

VSS står för "value of stochastic solution".

Ger ett mått på hur mycket det är värt att lösa det stokastiska programmeringsproblemet.

EEV ges av:

$\boxed{\text{Beräkna } \bar{x},\ \bar{y}} \longrightarrow \boxed{\text{Slump}} \longrightarrow \boxed{\text{Beslut } (y_s,\ s = 1, \dots, S)}$

RP ges av:

$\boxed{\text{Beslut i steg 1 } (x)} \longrightarrow \boxed{\text{Slump}} \longrightarrow \boxed{\text{Beslut i steg 2 } (y_s,\ s = 1, \dots, S)}$

Jordbruksexemplet:

$EEV = -$€107240, $RP = -$€108390, $VSS =$ €1150.