KTH Matematik

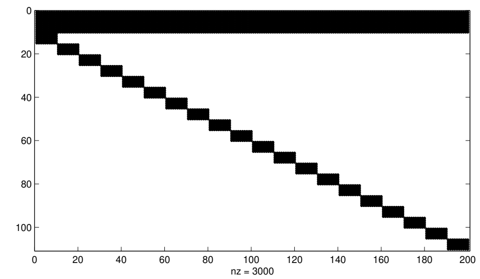
5B1815 Tillämpad linjär optimering

Föreläsning 7

Dekomposition och kolumngenerering.

Dantzig-Wolfe dekomposition

$$
\begin{array}{lll}
\min & c^T x & \\
\text{då} & A_H x = b_H, & A_H \text{ är “komplicerande”, dimension } m \times n, \\
 & A_E x = b_E, & A_E \text{ är “lätt”}, \\
 & x \geq 0. &
\end{array}
$$



Tillåtna baslösningar

Låt $S = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$. För ett givet $x \in S$, partitionera x som $x = (x_+^T \; x_0^T)^T$ och $A = (A_+ \; A_0)$, där

$$\begin{pmatrix} A_+ & A_0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_+ > 0.$$

Definition. *En punkt $x \in S$ är en* tillåten baslösning *om A_+ har linjärt oberoende kolumner.*

Alternativt kan $x \in S$ definieras som tillåten baslösning om det inte finns $p \neq 0$ så att

$$\begin{pmatrix} A_+ & A_0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_+ \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Extrempunkter och tillåtna baslösningar

Definition. *Låt C vara en konvex mängd. Då är x en* extrempunkt *till C om $x \in C$ och det inte finns $y \in C$, $z \in C$, $y \neq x$, $z \neq x$, och $\alpha \in (0,1)$ så att $x = (1-\alpha)y + \alpha z$.*

Sats. *En punkt $x \in S$ är en extrempunkt till S om och endast om x är en tillåten baslösning.*

Bevis. Se Nash och Sofer, sid. 80–81. □

En extrempunkt till S är alltså en tillåten punkt som är unikt bestämd av de bindande billkoren.

Representationssatsen

Sats. *Låt* $S = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$. *Antag att* S *har extrempunkter* v_i, $i = 1, \dots, k$. *Då gäller att*

$$S = \left\{ x : x = d + \sum_{i=1}^{k} v_i \alpha_i,\ Ad = 0,\ d \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha \geq 0 \right\}$$
$$= \left\{ x : x = d + V\alpha,\ Ad = 0,\ d \geq 0,\ e^T\alpha = 1,\ \alpha \geq 0 \right\},$$

där $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{pmatrix}$ *och* $e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$.

Bevis. Se Nash och Sofer, sid. 88–89. □

Vi använder denna representation på $S_E = \{x : A_E x = b_E, x \geq 0\}$.

För enkelhets skull antas att S_E är begränsad, dvs $d = 0$.

Dantzig-Wolfe dekomposition, masterproblemet

$$(MASTER) \quad \begin{array}{ll} \text{min} & c^T V\alpha \\ \text{då} & A_H V\alpha = b_H, \\ & e^T\alpha = 1, \\ & \alpha \geq 0, \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{min} & \sum_{i=1}^{k} c^T v_i \alpha_i \\ \text{då} & \sum_{i=1}^{k} A_H v_i \alpha_i = b_H, \\ & \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \\ & \alpha \geq 0. \end{array}$$

$$c_M^T = c^T V = \begin{pmatrix} c^T v_1 & c^T v_2 & \cdots & c^T v_k \end{pmatrix}$$

$$A_M = \begin{pmatrix} A_H V \\ e^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_H v_1 & A_H v_2 & \cdots & A_H v_k \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad b_M = \begin{pmatrix} b_H \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observera att k är *mycket* stort. Hela V används *ej*.

Dantzig-Wolfe dekomposition, simplexiteration i masterproblemet

Låt $V_B = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_{m+1} \end{pmatrix}$ svara mot basvariabler α_i, $i = 1, \dots, m+1$.

Baslösning:

$$\begin{pmatrix} A_H V_B \\ e_B^T \end{pmatrix} \alpha_B = \begin{pmatrix} b_H \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m+1} A_H v_i \alpha_i = b_H, \\ \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i = 1. \end{array}$$

Simplexmultiplikatorer:

$$\begin{pmatrix} V_B^T A_H^T & e_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y} \\ y_{m+1} \end{pmatrix} = V_B^T c \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} v_i^T A_H^T \bar{y} + y_{m+1} = v_i^T c, \\ i = 1, \dots, m+1. \end{array}$$

Reducerade kostnader:

$$c^T v_i - \bar{y}^T A_H v_i - y_{m+1}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Dantzig-Wolfe dekomposition, minsta reducerade kostnaden

Minsta reducerade kostnaden:

$$\min_{i=1,\dots,k} \{c^T v_i - \bar{y}^T A_H v_i - y_{m+1}\} = -y_{m+1} + \min_{i=1,\dots,k} (c - A_H^T \bar{y})^T v_i.$$

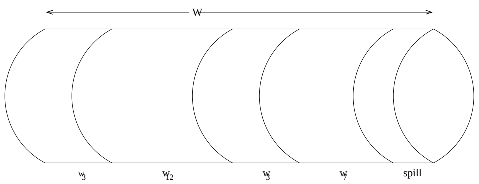
Ekvivalent LP-problem:

$$(SUB) \quad \begin{array}{lll} -y_{m+1} + & \text{min} & (c - A_H^T \bar{y})^T x \\ & \text{då} & A_E x = b_E, \\ & & x \geq 0. \end{array}$$

Om optimalvärdet till detta subproblem är negativt får vi ny extrempunkt v_i vilket ger en ny kolumn i masterproblemet.

Kolumngenerering

Exempel, trimoptimering ("cutting stock"):



Givet är rullar av bredd W.

Efterfrågat är rullar av m olika bredder.

Rulle i har bredd w_i, $i = 1, \ldots, m$.

Efterfrågan för rulle i är b_i rullar, $i = 1, \ldots, m$.

Man vill skära W-rullarna så att minimalt antal W-rullar går åt.

Vi antar att w_i, $i = 1, \ldots, m$, och W är heltaliga.

Kolumngenerering, forts.

Ett skärmönster är en vektor $a \in I\!R^m$ där a_i anger antalet rullar av typ i som ingår i skärmönstret. Vi får ett tillåtet skärmönster om och endast om

$$\sum_{i=1}^{m} w_i a_i \le W, \quad a \ge 0, \ \text{heltalig}.$$

Om kolumnerna i A ges av alla sådana tillåtna vektorer a kan vi formulera följande LP-problem:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^n x_j \\ \text{då} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ & x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Vi kräver inte x heltalig. Observera att n är *mycket* stort.

Kolumngenerering, masterproblemet

$$(MASTER) \quad \begin{array}{ll} \min & e^T x \\ \text{då} & Ax - s = b, \\ & x \ge 0, \ s \ge 0. \end{array}$$

Antag att vi har en basmatris B som ger en tillåten baslösning, där

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \end{pmatrix}.$$

Baslösning:

$$B x_B = b \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^m A_j x_j = b,$$

Kolumngenerering, simplexiteration i masterproblemet

Simplexmultiplikatorer:

$$B^T y = e, \quad \Leftrightarrow \quad A_j^T y = 1, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Reducerade kostnader:

$$y$$

$$1 - y^T A_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Kolumngenerering, minsta reducerade kostnaden

Minsta reducerade kostnaden (om $y \geq 0$):

$$\min_{j=1,\dots,n} \{1 - y^T A_j\}$$

Ekvivalent kappsäcksproblem:

$$(SUB) \qquad \begin{array}{lll} 1- & \max & y^T a \\ & \text{då} & w^T a \leq W, \\ & & a \geq 0, \ \text{heltalig.} \end{array}$$

Om optimalvärdet till detta subproblem är negativt ger optimallösningen ny kolumn A_j i masterproblemet.

Kappsäcksproblem

$$(KP) \qquad \begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{m} y_i a_i \\ \text{då} & \sum_{i=1}^{m} w_i a_i \leq W, \\ & a_i \geq 0, \ \text{heltal.} \end{array}$$

Vi antar att w och W är heltaliga.

Låt $f(k)$ vara optimalvärdet till (KP) med högerledet k i stället för W.

Då är $f(k) = 0$ för $k < \min_i\{w_i\}$.

För $k \geq \min_i\{w_i\}$ får vi rekursionsekvationen

$$f(k) = \max_{i:w_i \leq k} \{y_i + f(k - w_i)\}.$$

Kappsäcksproblem, forts.

Exempel: $y = (11 \ \ 6 \ \ 3)^T$, $w = (5 \ \ 3 \ \ 2)^T$, $W = 9$. Vi får

$$\begin{aligned}
f(0) &= f(1) = 0, \\
f(2) &= \max\{-, -, \underline{3 + f(0)}\} = 3, \\
f(3) &= \max\{-, \underline{6 + f(0)}, 3 + f(1)\} = 6, \\
f(4) &= \max\{-, \underline{6 + f(1)}, \underline{3 + f(2)}\} = 6, \\
f(5) &= \max\{\underline{11 + f(0)}, 6 + f(2), 3 + f(3)\} = 11, \\
f(6) &= \max\{11 + f(1), \underline{6 + f(3)}, 3 + f(4)\} = 12, \\
f(7) &= \max\{\underline{11 + f(2)}, 6 + f(4), \underline{3 + f(5)}\} = 14, \\
f(8) &= \max\{\underline{11 + f(3)}, \underline{6 + f(5)}, 3 + f(6)\} = 17, \\
f(9) &= \max\{11 + f(4), \underline{6 + f(6)}, 3 + f(7)\} = 18.
\end{aligned}$$

Uppnystning ger $a_1 = 0$, $a_2 = 3$ och $a_3 = 0$.

Relaxering

Att slopa heltalskravet på x är en *relaxering*. Generellt:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & x \in F, \end{array} \qquad (P_R) \quad \begin{array}{ll} \min & f_R(x) \\ \text{då} & x \in F_R. \end{array}$$

Definition. *Problem* (P_R) *är en* relaxering *av problem* (P) *om*

$$(i) \ \ F_R \supseteq F, \quad \textit{och} \quad (ii) \ \ f_R(x) \leq f(x) \ \textit{för alla} \ x \in F.$$

Påstående. *Optimalvärdena uppfyller* optval$(P_R) \leq$ optval(P).

Påstående. *Om x^* är en global minpunkt till (P_R) sådan att $x^* \in F$ och $f_R(x^*) = f(x^*)$, så är x^* en global minpunkt till (P).*