KTH Matematik

5B1815 Tillämpad linjär optimering

Föreläsning 8

Heltalsprogrammeringsmodeller.

Linjär heltalsprogrammering

Linjär heltalsprogrammering:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \ x \text{ heltalig.} \end{array}$$

Heltalskrav på variablerna tillåter vidare klass av problem.

Heltalskravet gör (troligtvis) problemet *väsentligt* svårare.

Heltalsprogrammeringsproblem är NP-fullständiga, vilket innebär att det inte finns kända metoder som löser alla sådana problem effektivt.

Heltalsvariabler

Heltalsvariabler tillåter diskreta val, ofta beslut.

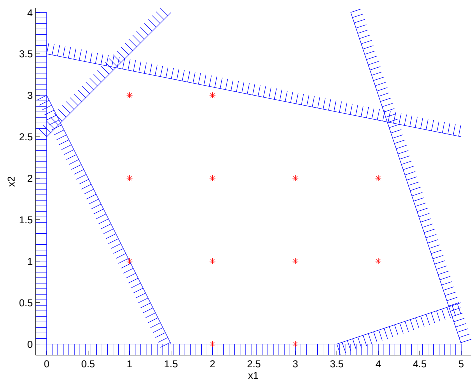
Exempelvis binära variabler, som antar värdet 0 eller 1.

För en binär variabel z, låt $\begin{cases} z = 1 \text{ svara mot att ett visst beslut tas,} \\ z = 0 \text{ svara mot att beslutet inte tas.} \end{cases}$

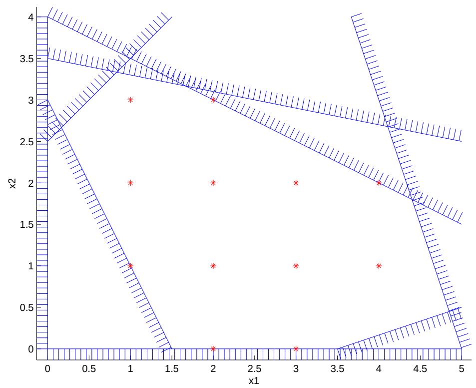
Använd endast heltalskrav om det behövs.

Representation av tillåtna området

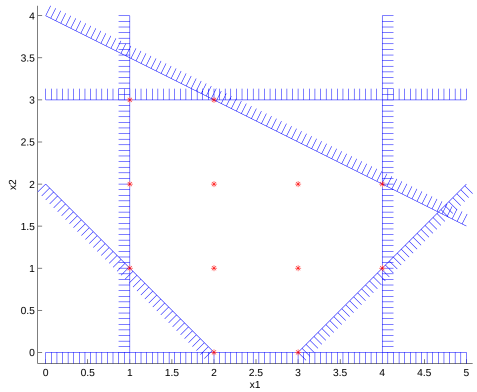
Olika A och b kan representera samma heltalsproblem.



Ursprunglig



Snävare



"Ideal"

Den snävaste representationen ges av de tillåtna heltalspunkternas konvexa hölje.

I allmänhet är den snävaste representationen inte tillgänglig.

Transportproblem

Antag att vi har ett transportproblem:

$$
(TP) \qquad
\begin{array}{lll}
\text{min} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, & i = 1, \ldots, m, \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, & j = 1, \ldots, n, \\
 & x_{ij} \ge 0, & i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

Påstående. *Om a och b är heltaliga har (TP) heltaliga extrempunkter.*

Simplexmetoden ger alltså heltalslösningar "på köpet".

Detta är endast sant för väldigt speciella problemklasser.

Transportproblem, forts.

Transportproblemets bivillkorsmatrisen blir:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\
 & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & 1
\end{pmatrix}$$

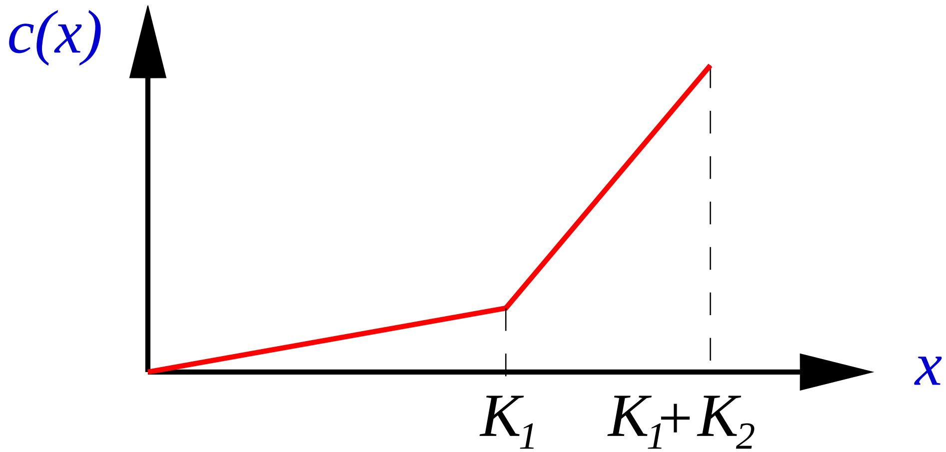
En rad är linjärt beroende.

Eliminering av godtycklig rad ger matris där varje basmatris är (permuterad) triangulär med ettor på diagonalen.

Konvex kostnad

Antag att vi har en kostnad $c(x)$ för en variabel x, där

$$c(x) = \begin{cases} c_1 x, & 0 \le x \le K_1, \\ c_1 K_1 + c_2(x - K_1), & K_1 \le x \le K_1 + K_2, \end{cases} \qquad \text{där } c_2 > c_1 > 0.$$



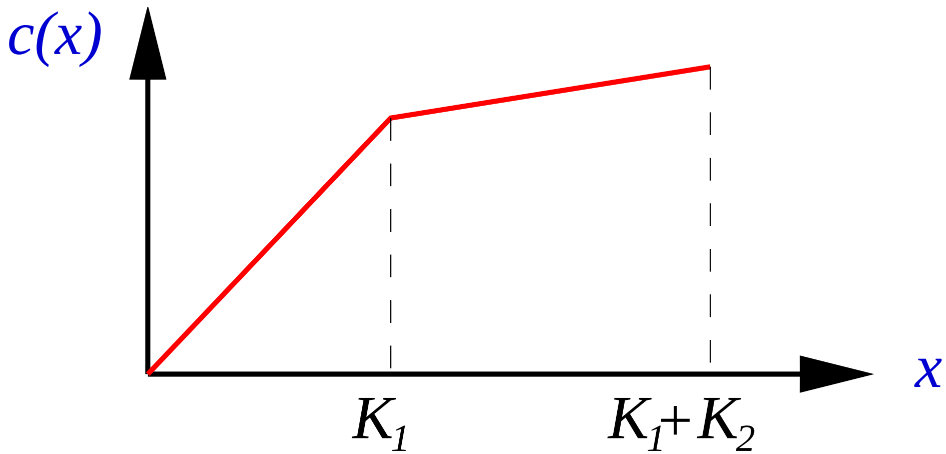
Låt $x = u + v$, $c(x) = c_1 u + c_2 v$, $0 \le u \le K_1$, $0 \le v \le K_2$.

Eftersom $c_2 > c_1$ får vi optimalt $v > 0$ endast om $u = K_1$.

Konkav kostnad

Antag att vi har en kostnad $c(x)$ för en variabel x, där

$$c(x) = \begin{cases} c_1 x, & 0 \le x \le K_1, \\ c_1 K_1 + c_2(x - K_1), & K_1 \le x \le K_1 + K_2, \end{cases} \quad \text{där } 0 < c_2 < c_1.$$



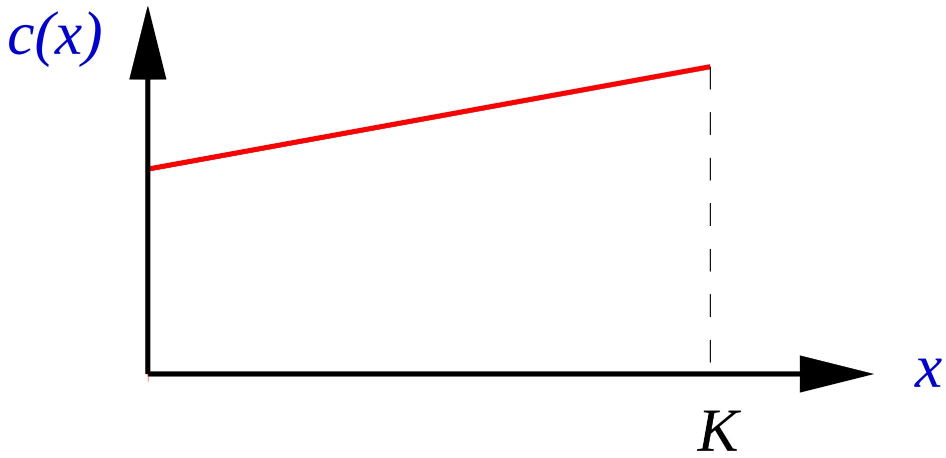
Låt $x = u + v$, $c(x) = c_1 u + c_2 v$, $K_1 w \le u \le K_1$, $0 \le v \le K_2 w$, $w \in \{0, 1\}$.

Beslutsvariabeln w behövs.

Fast kostnad

Antag att vi har en kostnad $c(x)$ för en variabel x, där

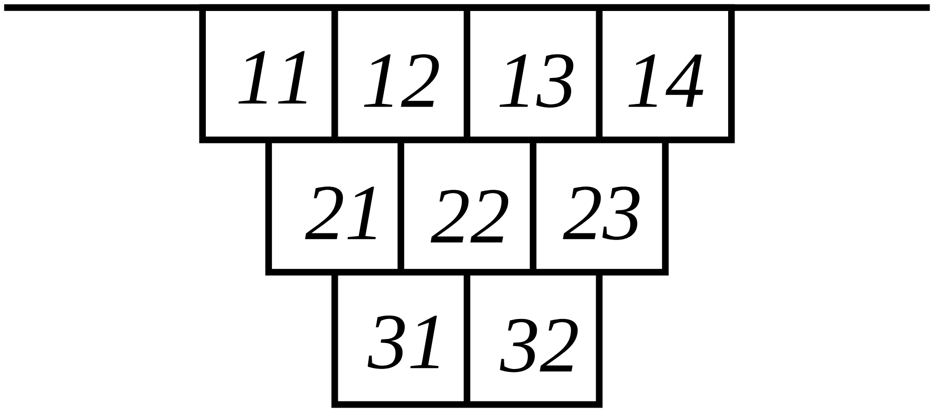
$$c(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ F + cx, & 0 < x \le K, \end{cases} \qquad \text{där } c > 0,\ F > 0.$$



Låt $c(x) = Fz + cx$, $0 \le x \le Kz$, $z \in \{0, 1\}$.

Malmbrytning

Antag att en gruva ska brytas i dagbrott enligt följande figur:



Antag att block ij har värde $v_{i,j}$, $i = 1, \ldots, 3$, $j = 1, \ldots, 5 - i$.

Låt $x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{svara mot att block } ij \text{ bryts,} \\ 0 & \text{svara mot att block } ij \text{ inte bryts.} \end{cases}$

Malmbrytning, forts.

Vi kan formulera följande problem:

$$
(IP_1) \qquad \begin{array}{lll}
\max & \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5-i} v_{i,j} x_{i,j} & \\
\text{då} & x_{i,j} \le x_{i-1,j}, & i = 2,3,\ j = 1,\dots,5-i, \\
& x_{i,j} \le x_{i-1,j+1}, & i = 2,3,\ j = 1,\dots,5-i, \\
& x_{i,j} \in \{0,1\}, & i = 1,2,3,\ j = 1,\dots,5-i.
\end{array}
$$

Alternativt:

$$
(IP_2) \qquad \begin{array}{lll}
\max & \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5-i} v_{i,j} x_{i,j} & \\
\text{då} & 2x_{i,j} \le x_{i-1,j} + x_{i-1,j+1}, & i = 2,3,\ j = 1,\dots,5-i, \\
& x_{i,j} \in \{0,1\}, & i = 1,2,3,\ j = 1,\dots,5-i.
\end{array}
$$

Malmbrytning, forts.

Formuleringarna (IP_1) och (IP_2) är heltalsmässigt ekvivalenta.

Om problemen LP-relaxeras, dvs om heltalskravet $x_{i,j} \in \{0,1\}$ relaxeras till $0 \leq x_{i,j} \leq 1$ för $i = 1,2,3$, $j = 1,\dots,5-i$, blir de resulterande LP-problemen *inte* ekvivalenta.

Vi har

$$\{x : x_{i,j} \leq x_{i-1,j},\ x_{i,j} \leq x_{i-1,j+1}\} \subseteq \{x : 2x_{i,j} \leq x_{i-1,j} + x_{i-1,j+1}\}.$$

(IP_1) ger alltså en snävare beskrivning av det tillåtna området.

För detta problem gäller speciellt att LP-relaxeringen av (IP_1) har heltaliga extrempunkter, varför (IP_1) kan lösas som ett LP-problem. Detta gäller i allmänhet *inte* för (IP_2).

Flygplansplanering

Låt $M = \{1, \ldots, m\}$ vara en given mängd och låt M_j, $j = 1, \ldots, n$, vara givna delmängder ur M.

Antag att M är en mängd flygrutter och varje M_j är flygmönster, dvs delmängder av rutterna som kan täckas av ett visst flygplan.

Hur kan rutterna täckas med så få flygplan som möjligt?

Låt bivillkorsmatrisen A och variabelvektorn x ges av

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i \in M_j, \\ 0 & \text{om } i \notin M_j, \end{cases} \qquad x_j = \begin{cases} 1 & \text{om flygmönster } j \text{ används}, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Flygplansplanering, forts.

Problemformulering:

$$
\begin{array}{lll}
\text{min} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j & \\
\text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1, & i = 1, \ldots, m, \\
& x_j \in \{0, 1\}, & j = 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

Ofta är n mycket stort. Liknande problem för besättningsplanering.

Kolumngenerering kan användas. Ofta komplext regelverk för konstruktion av kolumner.

Anläggningslokalisering

Antag att vi har möjlighet att anlägga fabriker på m olika ställen och att fabrikerna ska betjäna n kunder.

Att anlägga en fabrik på plats i kostar €p_i, $i = 1, \ldots, m$. En fabrik anlagd på plats i har en kapacitet av a_i enheter, $i = 1, \ldots, m$.

Fraktkostnaden per enhet från fabrik i till kund j är €c_{ij}.

Kund j efterfrågar b_j enheter av varan.

Vi kan införa variabler $z_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, m$, och $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, med betydelse

$$z_i = \begin{cases} 1 \text{ om fabrik anläggs på plats } i, \\ 0 \text{ annars,} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \text{mängd som skickas från fabrik } i \text{ till kund } j.$$

Anläggningslokalisering, forts.

Problemformulering:

$$
\begin{array}{lll}
\text{min} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i z_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_i z_i \le 0, & i = 1, \ldots, m, \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, & j = 1, \ldots, n, \\
 & z_i \in \{0, 1\}, & i = 1, \ldots, m, \\
 & x_{ij} \ge 0, & i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

Formulering av heltalsprogrammeringsproblem

- Att formulera optimeringsproblem är en konst.
- Formuleringen av heltalsprogrammeringsproblem kan vara helt avgörande för problemets lösbarhet.
- Insikt i metoder för heltalsprogrammering ger kunskap om bra modeller.
- Det är väsentligt att använda heltalsvariabler endast då det är motiverat.
- Metoden kan endast ge optimallösning till den modell vi formulerar.