KTH Matematik

5B1815 Tillämpad linjär optimering

Föreläsning 9

Trädsökning.

Trädsökning

Ett heltalsprogrammeringsproblem kan lösas med hjälp av *trädsökning*. Problemet delas upp i ett antal delproblem, som tillsammans ger lösningen till ursprungsproblemet.

Detta ger upphov till ett sökträd. I varje nod i trädet löses ett relaxerat problem.

En nod kan bli *uttömd* eller generera nya noder via *separation*.

Algoritmen terminerar då inga icke uttömda fria noder finns kvar i trädet.

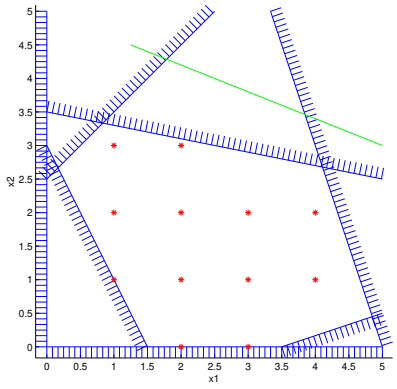
Exempelproblem

Litet exempelproblem:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -2x_1 - 5x_2 \\
\text{då} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 3, \\
& -2x_1 + 6x_2 \geq -7, \\
& -3x_1 - x_2 \geq -15, \\
& -x_1 - 5x_2 \geq -17\tfrac{1}{2}, \\
& x_1 - x_2 \geq -2\tfrac{1}{2}, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \text{ heltaliga.}
\end{aligned}
$$

Geometrisk illustration av exempelproblemet

Problemet kan illustreras grafiskt:



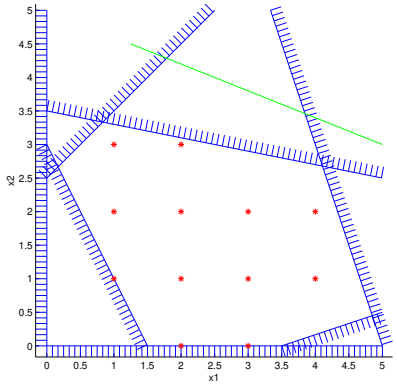
Optimallösning: $x = (2\ 3)^T$. Optimalvärde: $z = -19$.

Sökträd för exempelproblemet

LP-relaxering används i noderna.

Problemet i nod 0

Problemet i nod 0 blir:



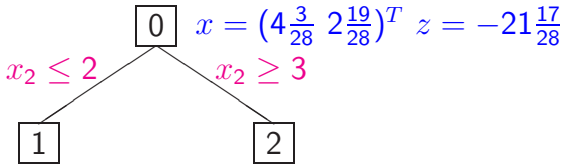
LP-relaxering ger $x = (4\frac{3}{28}\ 2\frac{19}{28})^T$ och $z = -21\frac{17}{28}$.

Sökträd för exempelproblemet

LP-relaxering används i noderna.

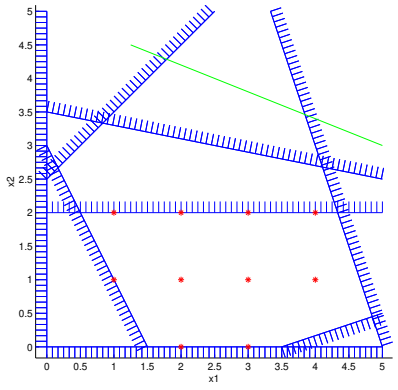
Sökträd för exempelproblemet

LP-relaxering används i noderna.



Problemet i nod 1

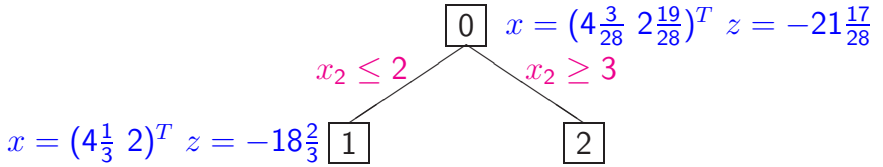
Problemet i nod 1 blir:



LP-relaxering ger $x = (4\frac{1}{3}\ 2)^T$ och $z = -18\frac{2}{3}$.

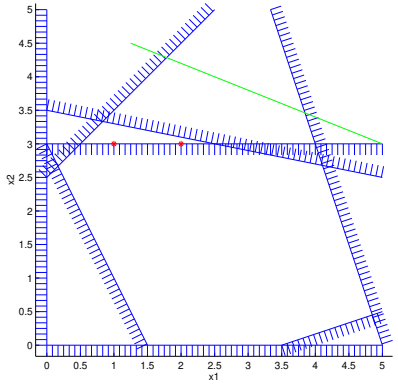
Sökträd för exempelproblemet

LP-relaxering används i noderna.



Problemet i nod 2

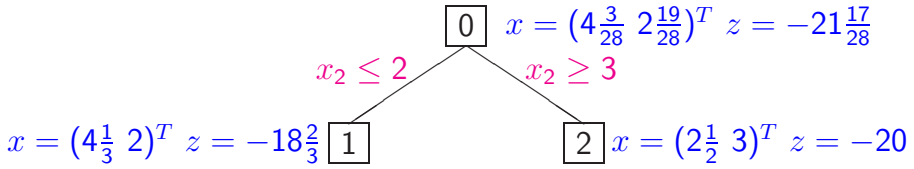
Problemet i nod 2 blir:



LP-relaxering ger $x = (2\frac{1}{2}\ 3)^T$ och $z = -20$.

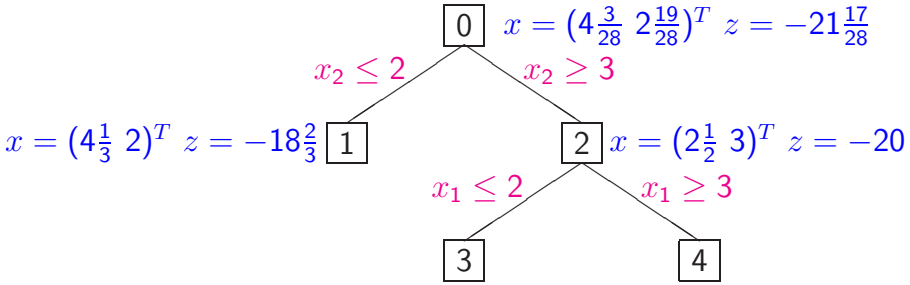
Sökträd för exempelproblemet

LP-relaxering används i noderna.



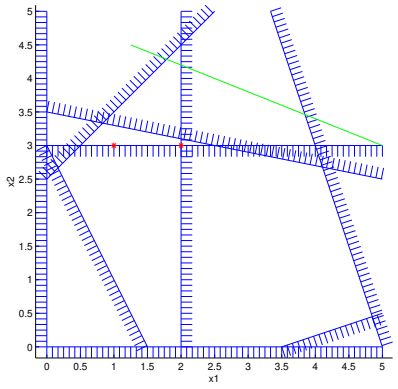
Sökträd för exempelproblemet

LP-relaxering används i noderna.



Problemet i nod 3

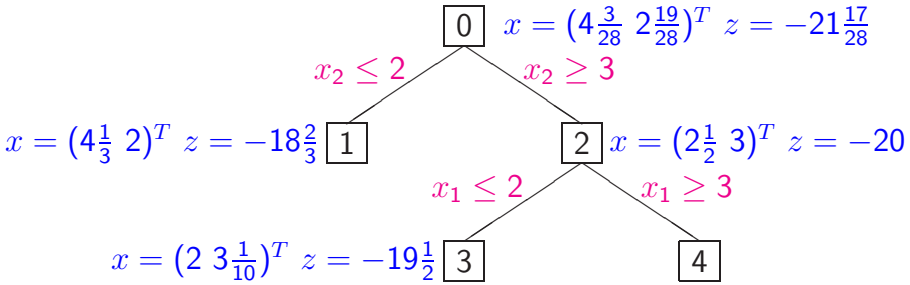
Problemet i nod 3 blir:



LP-relaxering ger $x = (2\ 3\frac{1}{10})^T$ och $z = -19\frac{1}{2}$.

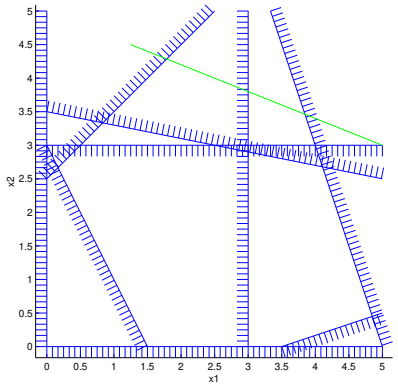
Sökträd för exempelproblemet

LP-relaxering används i noderna.



Problemet i nod 4

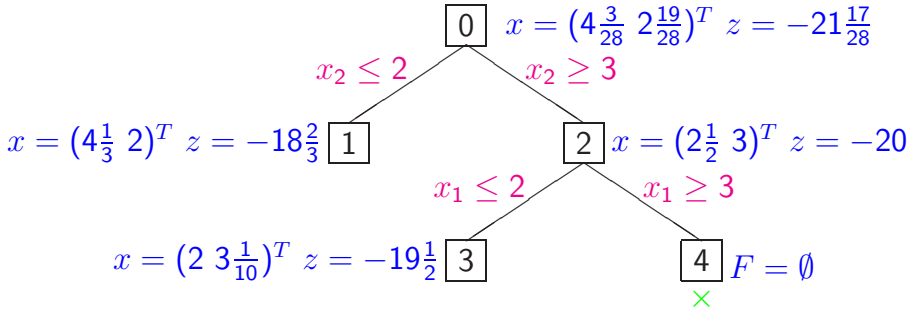
Problemet i nod 4 blir:



LP-relaxeringen saknar tillåtna lösningar.

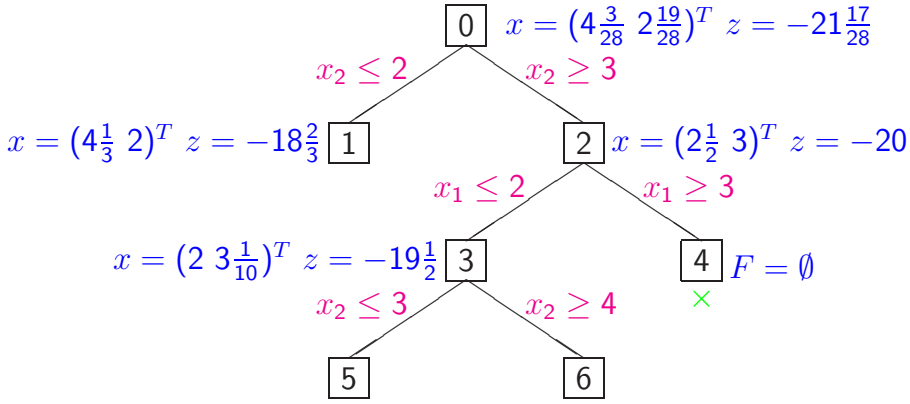
Sökträd för exempelproblemet

LP-relaxering används i noderna.



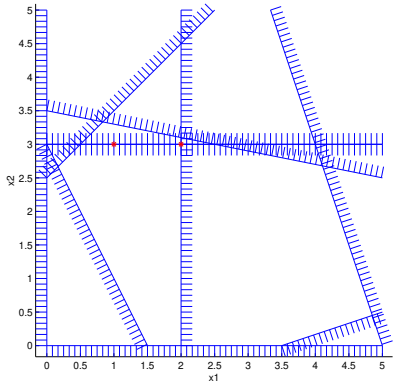
Sökträd för exempelproblemet

LP-relaxering används i noderna.



Problemet i nod 5

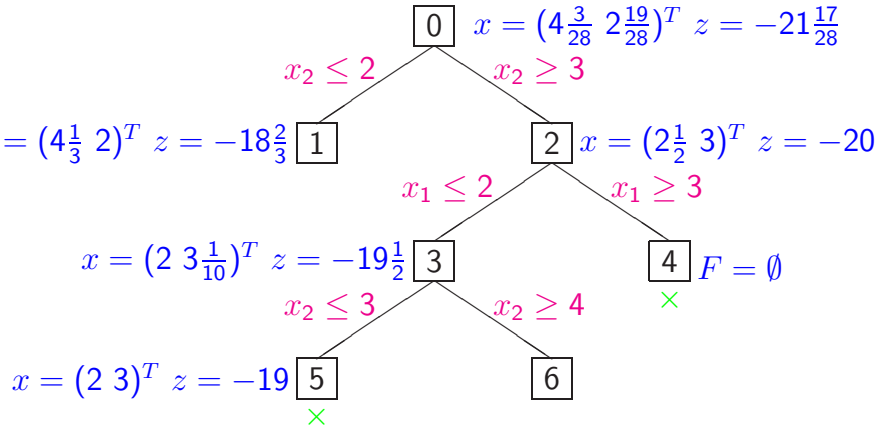
Problemet i nod 5 blir:



LP-relaxering ger $x = (2\ 3)^T$ och $z = -19$.

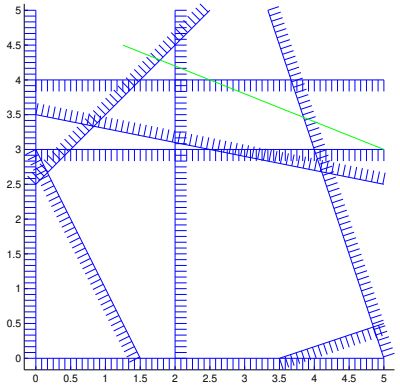
Sökträd för exempelproblemet

LP-relaxering används i noderna.



Problemet i nod 6

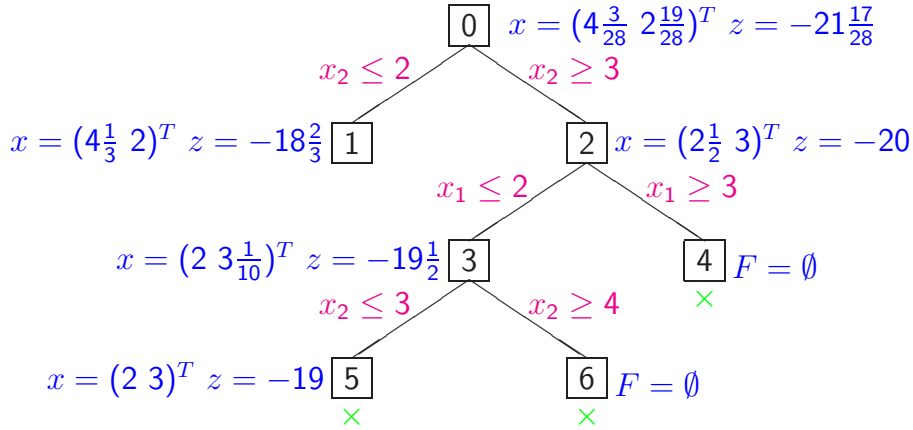
Problemet i nod 6 blir:



LP-relaxeringen saknar tillåtna lösningar.

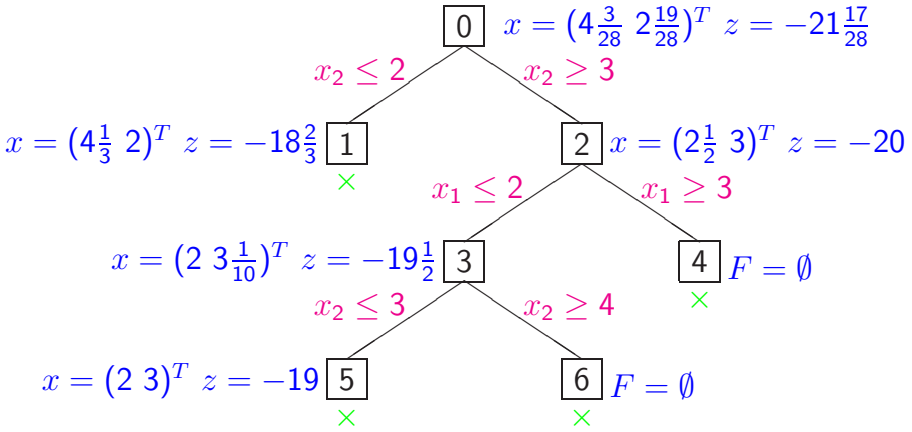
Sökträd för exempelproblemet

LP-relaxering används i noderna.



Sökträd för exempelproblemet

LP-relaxering används i noderna.



Optimallösning: $x = (2\ 3)^T$. Optimalvärde: $z = -19$.

Uttömning i trädsökning

En nod är uttömd i följande fall:

1. Nodens problem saknar tillåten lösning.
2. Nodens problem kan inte ge bättre målfunktionsvärde än bäst kända.
3. Nodens problem är löst.

Uttömning baseras på nodens relaxerade problem enligt följande:

1. Nodens relaxerade problem saknar tillåten lösning.
2. Nodens relaxerade problems optimalvärde är inte bättre än bäst kända.
3. Det relaxerade problemets optimallösning är optimal till nodens problem.

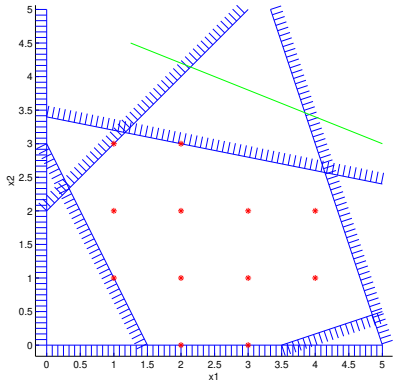
Modifiering av exempelproblemet

Exempelproblemets bivillkor 4 och 5 kan göras något snävare om vi utnyttjar att alla koefficienter är heltaliga:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -2x_1 - 5x_2 \\
\text{då} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 3, \\
& -2x_1 + 6x_2 \geq -7, \\
& -3x_1 - x_2 \geq -15, \\
& -x_1 - 5x_2 \geq -17, \\
& x_1 - x_2 \geq -2, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \text{ heltaliga.}
\end{aligned}
$$

Geometrisk illustration av modifierade exempelproblemet

Problemet kan illustreras grafiskt:



Optimallösning: $x = (2\ 3)^T$. Optimalvärde: $z = -19$.

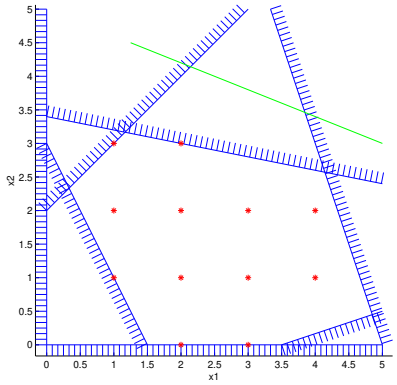
Sökträd för modifierade exempelproblemet

LP-relaxering används i noderna.

0

Problemet i nod 0

Problemet i nod 0 blir:



LP-relaxering ger $x = (4\frac{1}{7}\ 2\frac{4}{7})^T$ och $z = -21\frac{1}{7}$.

Utnyttja mer information i noden

Använd *heuristik* för att försöka hitta "bra" tillåten lösning.

Bindande bivillkorens matris har endast negativa koefficienter. Prova att avrunda LP-lösningen nedåt, vilket ger $\bar{x} = (4\ 2)^T$. Detta ger en tillåten lösning med målfunktionsvärde $\bar{z} = -18$.

Vi kan nu leta efter lösningar med $z \leq -19$.

Vi kan göra lite till. I LP-optimum har vi multiplikatorer som ges av

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

vilket ger $\lambda_3 = \frac{5}{14}$ och $\lambda_4 = \frac{13}{14}$.

Utnyttja mer information i noden, forts.

Antag att bivillkor 3 och 4 fortfarande är aktiva, men högerleden ändras. Då ger en ändring av högerledet i bivillkor 3 till $-15 + \delta_3$ krav på målfunktionsvärdet enligt

$$-21\frac{1}{7} + \frac{5}{14}\delta_3 \leq -19, \quad \text{dvs} \quad \delta_3 \leq 6.$$

Vi kan lägga till bivillkoret $3x_1 + x_2 \geq 9$.

På analogt sätt får vi för bivillkor 4

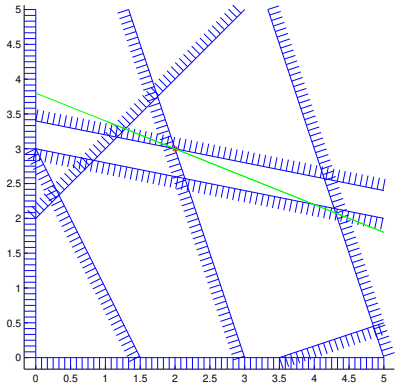
$$-21\frac{1}{7} + \frac{13}{14}\delta_4 \leq -19, \quad \text{dvs} \quad \delta_4 \leq 2\frac{4}{13}.$$

Heltaliga koefficienter i rad 4 av A ger $\delta_4 \leq 2$.

Vi kan alltså även lägga till bivillkoret $x_1 + 5x_2 \geq 15$.

Modifierade problemet i nod 0

Modifierade problemet i nod 0 blir:



Modifikationen används i noder under den modifierade.

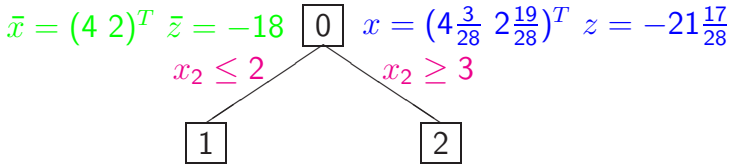
Sökträd för modifierade exempelproblemet

LP-relaxering används i noderna.

$\bar{x} = (4\ 2)^T\ \bar{z} = -18$ 0 $x = (4\frac{3}{28}\ 2\frac{19}{28})^T\ z = -21\frac{17}{28}$

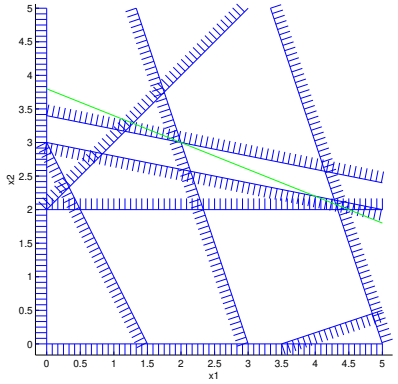
Sökträd för modifierade exempelproblemet

LP-relaxering används i noderna.



Problemet i nod 1

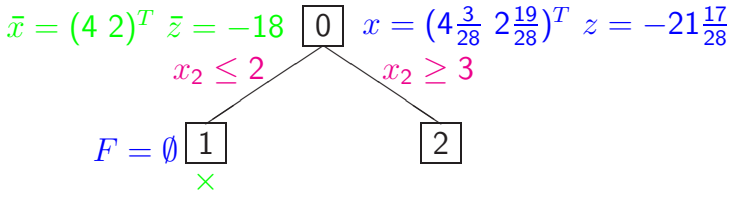
Problemet i nod 1 blir:



LP-relaxeringen saknar tillåtna lösningar.

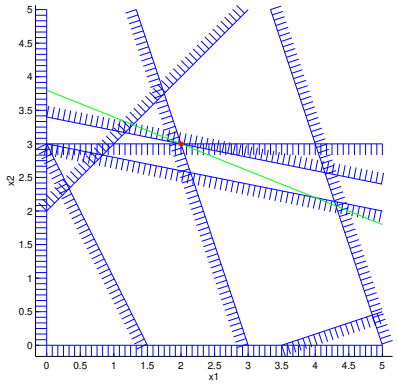
Sökträd för modifierade exempelproblemet

LP-relaxering används i noderna.



Problemet i nod 2

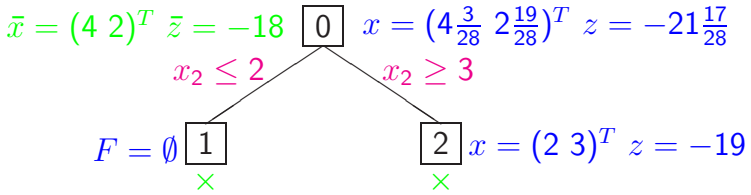
Problemet i nod 2 blir:



LP-relaxering ger $x = (2\ 3)^T$ och $z = -19$.

Sökträd för modifierade exempelproblemet

LP-relaxering används i noderna.



Optimallösning: $x = (2\ 3)^T$. Optimalvärde: $z = -19$.

Några kommentarer om trädsökning med LP-relaxering i noderna

Vi antar att LP-relaxering används i noderna.

- Heuristiska metoder för att generera tillåtna lösningar väsentliga.
- Bra lösare genererar många bivillkor som gör tillåtna LP-området snävare.
- Dual simplexmetod normalt effektiv för att lösa LP-relaxerade problemen.
- Många detaljer viktiga för effektiv lösare, ex CPLEX.
- Separation av binära variabler innebär fixering av variabler.
- "Standardangreppssättet" för heltalsprogrammeringsproblem.
- Ofta effektiv, men alla problem löses inte effektivt på detta sätt.