Kungl Tekniska Högskolan

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Tisdagen den 28 augusti 2001 kl. 8.00–13.00.

Kortfattade lösningsförslag.

1. (a) Ja.
(b) Nej.
(c) Nej.
(d) Ja.
(e) Ja.

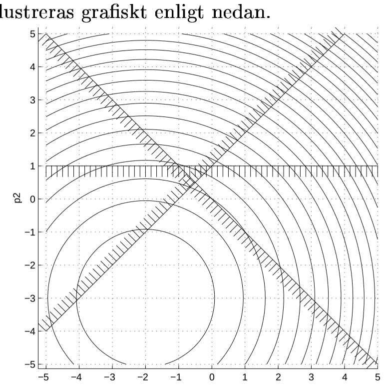
2. QP-subproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}p^T\nabla^2_{xx}l(x^{(0)},\lambda^{(0)})p + \nabla f(x^{(0)})^T p \\ \text{då} & \nabla g(x^{(0)})\ p \geq -g(x^{(0)}). \end{array}$$

Insättning av numeriska värden ger QP-problemet

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + 2p_1 + 3p_2 \\ \text{då} & p_1 - p_2 \geq -1, \\ & p_1 + p_2 \geq 0, \\ & p_2 \geq 1. \end{array}$$

Problemet kan illustreras grafiskt enligt nedan.



Optimallösningen är alltså $p^{(0)} = (0\ 1)^T$, vilket ger

$$x^{(1)} = x^{(0)} + p^{(0)} = (0\ 1)^T.$$

Bivillkor 1 och 3 är bindande. Multiplikatorernas värden ges av

$$\begin{aligned} p_1^{(0)} + 2 &= \lambda_1^{(1)}, \\ p_2^{(0)} + 3 &= -\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(1)}, \end{aligned}$$

vilket ger $\lambda^{(1)} = (2\ 0\ 6)^T$.

3. (Se kursmaterialet.)

4. (a) Vi kan skriva målfunktionen som $\frac{1}{2}x^THx + c^Tx$, där

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att $\widehat{x}$ är tillåten, med bindande bivillkor $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$, eller på matrisform $A_Ax \geq b_A$, med

$$A_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad b_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Första ordningens optimalitetsvillkor säger nu att det ska finnas $\lambda_A \geq 0$ så att $H\widehat{x} + c = A_A^T\lambda_A$. Insättning av numeriska värden ger

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

vilket har lösning $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Alltså är första ordningens optimalitetsvillkor uppfyllda.
Andra ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor kräver dessutom att $Z_A^THZ_A \succeq 0$, där Z_A är en matris vars kolumner bildar bas för nollrummet till A_A. Exempelvis kan vi skriva $A_A = (B\ N)$, med $B = I$ och $N = 0$, vilket ger

$$Z_A = \begin{pmatrix} -B^{-1}N \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Därmed får vi

$$Z_A^THZ_A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att $Z_A^T H Z_A$ inte är positivt semidefinit. Därmed är $\widehat{x}$ inte en lokal minpunkt till (QP).

(b) En negativ krökningsriktning till $Z_A^T H Z_A$ ges exempelvis av $v = (1\ 0)^T$, eftersom $v^T Z_A^T H Z_A v = -1 < 0$. (Detta svarar mot det negativa egenvärdet.) Vi kan eliminera denna negativa krökning genom att kräva $v^T Z_A^T x = v^T Z_A^T \widehat{x}$ utöver de bivillkor vi redan har. Insättning av numeriska värden i $v^T Z_A^T x = v^T Z_A^T \widehat{x}$ ger $x_3 = 1$. Till nya problemet får vi alltså bindande bivillkorsmatrisen enligt $\widetilde{A}_A x = \widetilde{b}_A$, med

$$\widetilde{A}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \widetilde{b}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får $\widetilde{Z}_A = (0\ 0\ 0\ 1)^T$, vilket ger $\widetilde{Z}_A^T H \widetilde{Z}_A = 2$. Det nya likhetsbivillkoret får multiplikator noll, dvs $\widetilde{\lambda}_A = (1\ 1\ 0)^T$. Därmed är andra ordningen tillräckliga optimalitetsvillkor uppfyllda, eftersom vi då får en positivt definit reducerad Hessian, och dessutom har strikt komplementaritet för olikhetsbivillkoren.

Lägg alltså till bivillkoret $x_3 = 1$. (Då blir faktiskt $\widehat{x}$ även en global minpunkt till det nya problemet, eftersom det nya bivillkoret medför att problemet blir konvext.)

5. (a) Eftersom $Ix - A \succeq 0$ gäller om och endast om x är minst lika stort som största egenvärdet till A, ser vi att optimallösningen (och optimalvärdet) till (SDP) är det största egenvärdet till A.

(b) Om A är diagonal, kan den duala matrisen Λ också väljas diagonal,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

(Därmed är problemet faktiskt ett LP-problem.) Det primal-duala ekvationssystemet blir

$$\begin{aligned} 1 - \lambda_1 - \lambda_2 &= 0, \\ (x-2)\lambda_1 &= \mu, \\ (x+4)\lambda_2 &= \mu. \end{aligned}$$

Vi kan eliminera λ_1 och λ_2, vilket ger

$$1 - \frac{\mu}{x-2} - \frac{\mu}{x+4} = 0.$$

Multiplikation med $(x-2)(x+4)$, samt lösning av andragradsekvation för den positiva roten ger

$$x(\mu) = -1 + \mu + \sqrt{9 + \mu^2}.$$

Optimallösningen x^* ges av $x^* = \lim_{\mu \to 0} x(\mu) = 2$, vilket överensstämmer med största egenvärdet till A.