KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Tisdagen den 26 augusti 2003 kl. 8.00–13.00.

Kortfattade lösningsförslag.

---

1. (a) Nej.
(b) Nej.
(c) Ja.
(d) Ja.
(e) Ja.

2. (a) Målfunktionen är differentierbar överallt eftersom de givna punkterna är olika. Eftersom vi har ett konvext problem är nödvändigt och tillräckligt villkor för global optimalitet att målfunktionens gradient är noll, dvs

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{x_1 - p_i}{\sqrt{(x_1-p_i)^2 + (x_2-q_i)^2}} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{m} \frac{x_2 - q_i}{\sqrt{(x_1-p_i)^2 + (x_2-q_i)^2}} = 0.$$

(b) Om vi låter $f_2(x)$ beteckna målfunktionen får vi

$$\nabla f_2(0) = \begin{pmatrix} -2\sum_{i=1}^m p_i \\ -2\sum_{i=1}^m q_i \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f_2(0) = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}.$$

Newtonriktningen, och nya iterationspunkten, ges av

$$-\begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2\sum_{i=1}^m p_i \\ -2\sum_{i=1}^m q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^m p_i \\ \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^m q_i \end{pmatrix}.$$

Då problemet är kvadratiskt med positivt definit Hessian har vi globalt optimum efter en iteration.

3. QP-subproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2} p^T \nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) p + \nabla f(x^{(0)})^T p \\ \text{då} & \nabla g(x^{(0)})\ p \geq -g(x^{(0)}). \end{array}$$

Insättning av numeriska värden ger QP-problemet

$$\begin{array}{ll} \min & 5p_1^2 + 5p_2^2 - 10p_1 - 10p_2 \\ \text{då} & -p_1 - p_2 \geq -1, \\ & p_1 \geq 0, \\ & p_2 \geq 0. \end{array}$$

Detta kan lösas geometriskt, då vi söker den tillåtna punkt som ligger närmast $(1\ 1)^T$. Optimallösningen blir då $p^{(0)} = (1/2\ 1/2)^T$, vilket ger

$$x^{(1)} = x^{(0)} + p^{(0)} = (1/2\ 1/2)^T.$$

Bivillkor 1 är bindande. Multiplikatorns värde ges av

$$\begin{aligned} 10p_1^{(0)} - 10 &= -\lambda_1^{(1)}, \\ 10p_2^{(0)} - 10 &= -\lambda_1^{(1)}, \end{aligned}$$

vilket ger $\lambda^{(1)} = (5\ 0\ 0)^T$.

4. (Se kursmaterialet.)

5. (a) Vi får $Ix \succeq A \succeq -Ix$ om och endast om x är minst lika stort som det till beloppet största egenvärdet till A. Därmed ser vi att optimallösningen (och optimalvärdet) till (SDP) är det till beloppet största egenvärdet till A. (Eftersom A är symmetrisk är det samma sak som största singulärvärdet till A.)

(b) Vi kan skriva om (SDP) på ekvivalent form som

$$(SDP') \qquad \begin{array}{ll} -\max & -x \\ \text{då} & -Ix \preceq A, \\ & -Ix \preceq -A. \end{array}$$

Dualen till detta problem ges av

$$(DSDP') \qquad \begin{array}{ll} -\min & \operatorname{trace}(AY_1) - \operatorname{trace}(AY_2)) \\ \text{då} & -\operatorname{trace}(Y_1) - \operatorname{trace}(Y_2) = -1, \\ & Y_1 = Y_1^T \succeq 0, \quad Y_2 = Y_2^T \succeq 0, \end{array}$$

vilket ekvivalent kan skrivas som

$$(DSDP) \qquad \begin{array}{ll} \max & -\operatorname{trace}(AY_1) + \operatorname{trace}(AY_2)) \\ \text{då} & \operatorname{trace}(Y_1) + \operatorname{trace}(Y_2) = 1, \\ & Y_1 = Y_1^T \succeq 0, \quad Y_2 = Y_2^T \succeq 0. \end{array}$$

(c) Låt η vara det till beloppet största egenvärdet till A, och låt u vara en motsvarande egenvektor där $u^Tu = 1$. Om $\eta \leq 0$, låt $Y_1 = uu^T$, $Y_2 = 0$, och om $\eta > 0$, låt $Y_1 = 0$, $Y_2 = uu^T$. Då blir i båda fallen Y_1 och Y_2 tillåtna till $(DSDP)$ med målfunktionsvärde $|\eta|$, vilket är optimalt.