KTH Matematik

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem
Fredagen den 18 mars 2005 kl. 14.00–19.00
Kortfattade lösningsförslag

1. (a) Nej.
(b) Ja.
(c) Nej.
(d) Nej.
(e) Ja.

2. (Se kursmaterialet.)

3. Vi har

$$f(x) = \frac{1}{2}(x_1-7)^2 + \frac{1}{2}(x_2-6)^2, \quad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1-7 \\ x_2-6 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2, \quad \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$g_2(x) = x_1, \quad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Newtonsteget Δx, $\Delta\lambda$ ges av

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x,\lambda) & A(x)^T \\ \Lambda A(x) & -G(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ -\Delta\lambda \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \nabla f(x) - A(x)^T\lambda \\ G(x)\lambda - \mu e \end{pmatrix},$$

där $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda)$ och $G(x) = \operatorname{diag}(g(x))$.
Insättning ger det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ -\Delta\lambda_1 \\ -\Delta\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösningen ges av $\Delta x = (6/7 \;\; 2)^T$, $\Delta\lambda = (12/7 \;\; -12/7)^T$.
Steglängden α bör bestämmas så att $g(x+\alpha\Delta x) > 0$ och $\lambda + \alpha\Delta\lambda > 0$. Detta gäller för $\alpha = 1$. Om vi, för enkelhets skull, bortser från krav från en meritfunktion och väljer $\alpha = 1$, får vi $x^1 = (13/7 \;\; 2)^T$ och $\lambda^1 = (26/7 \; 2/7)^T$. (Vi har $x(2) \approx (1.2493 \; 0.8715)^T$ och $\lambda(2) \approx (5.8846 \; 1.6009)^T$.)

4. QP-subproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}p^T \nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(0)}, \lambda^{(0)})p + \nabla f(x^{(0)})^T p \\ \text{då} & \nabla g_1(x^{(0)})^T p \geq -g_1(x^{(0)}), \\ & \nabla g_2(x^{(0)})^T p \geq -g_2(x^{(0)}). \end{array}$$

Insättning av numeriska värden ger QP-problemet

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{3}{2}p_1^2 + \frac{3}{2}p_2^2 - 6p_1 - 6p_2 \\ \text{då} & -p_1 \geq -1, \\ & p_1 \geq -1. \end{array}$$

Problemet är separabelt, dvs vi kan lösa separat med avseende på p_1 och p_2. Optimallösningen blir $p = (1\ 2)^T$ med lagrangemultiplikatorvektor $\lambda = (3\ 0)^T$. Alltså blir $x^{(1)} = (2\ 2)^T$ och $\lambda^{(1)} = (3\ 0)^T$.

5. (a) Första ordningens optimalitetsvillkor ges av $\nabla f(x) + c = 0$. Alltså uppfyller $\widetilde{x}$ första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor om vi väljer $c = -\nabla f(\widetilde{x}) = (-2\ \ -1\ 0\ 1)^T$.

(b) Hessianen $\nabla^2 \widetilde{f}(\widetilde{x})$ har tre diagonalblock, ett 2×2-block som är indefinit, dvs svarar mot ett positivt och ett negativt egenvärde, ett negativt 1×1-block och ett positivt 1×1-block. Därmed har $\nabla^2 \widetilde{f}(\widetilde{x})$ två positiva egenvärden och två negativa egenvärden. För att åstadkomma en positivt definit reducerad Hessian med linjära bibillkor måste vi därför lägga till minst två linjära bivillkor.

Hessianens struktur gör att vi enkelt kan identifiera de två egenvektorerna som svarar mot negativa egenvärden,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi kan nu ta bort den negativa krökningen i Hessianen genom att lägga till de två linjära likhetsbivillkoren $v_1^T x = v_1^T \widetilde{x}$ och $v_2^T x = v_2^T \widetilde{x}$, dvs $x_1 - x_2 = -1$ och $x_3 = 3$. Då blir den reducerade Hessianen till målfunktionen positivt definit, vilket medför att $\widetilde{x}$ blir en lokal minpunkt till det resulterande problemet.