KTH Matematik

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem
Tisdagen den 20 december 2005 kl. 14.00–19.00
Kortfattade lösningsförslag

---

1. (a) Ja.

(b) Nej.

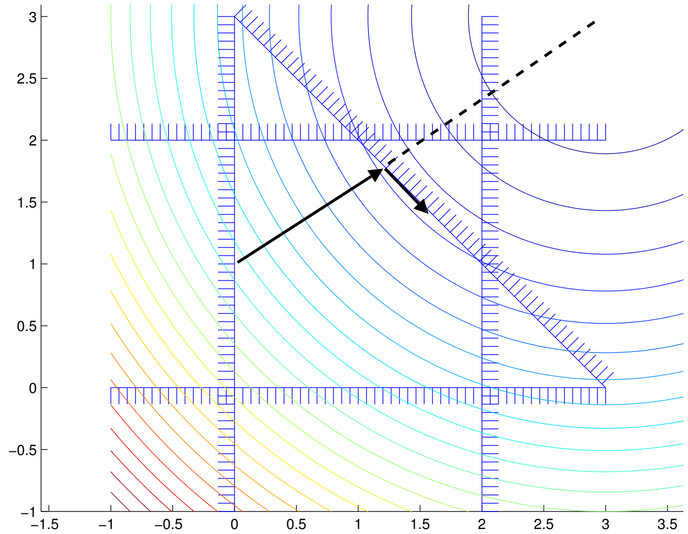
(c) Nej.

(d) Ja.

(e) Ja.

2. (Se kursmaterialet.)

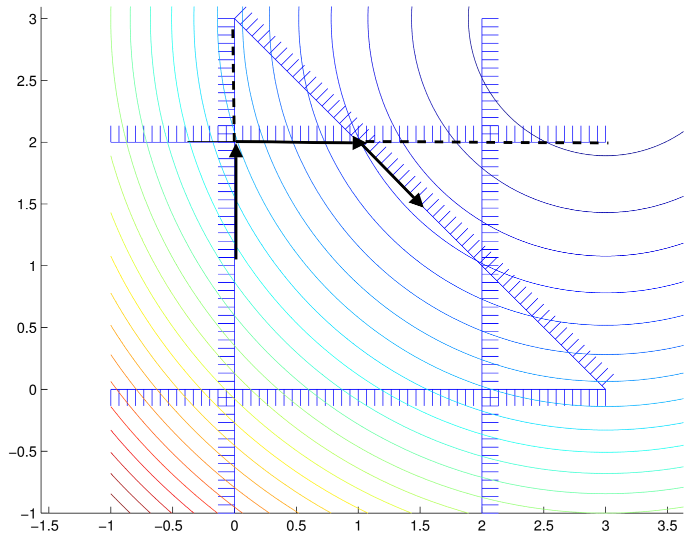
3. (a) Iterationerna kan illustreras i nedanstående figur,



I startpunkten x^0 är inga bivillkor aktiva. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen. Steglängden begränsas av bivillkor 3, vilket ger x^1. Därmed blir bivillkor 3 aktivt.

I x^1 ges sökriktningen till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 3 aktivt. Steglängden ett accepteras, vilket ger x^2. Bivillkor 3 har nu positiv lagrangemultiplikator, varför vi har hittat optimalpunkten.

(b) Iterationerna kan illustreras i nedanstående figur,



I startpunkten x^0 är bivillkor 4 aktivt. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 4 aktivt. Steglängden begränsas av bivillkor 2, vilket ger x^1. Därmed blir bivillkor 2 och bivillkor 4 aktiva.

I x^1 ges sökriktningen till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 2 och 4 aktiva. Denna sökriktning är nollvektorn, och därmed blir steglängden ett accepterad samt $x^2 = x^1$.

I x^2 har vi bivillkor 2 och 4 aktiva. Då steglängden var ett, ska multiplikatorerna evalueras. Bivillkor 4 har negativ lagrangemultiplikator, varför detta villkor släpps. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 2 aktivt. Steglängden begränsas av bivillkor 3, vilket ger x^3. Därmed blir bivillkor 2 och 3 aktiva.

I x^3 ges sökriktningen till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 2 och 3 aktiva. Denna sökriktning är nollvektorn, och därmed blir steglängden ett accepterad samt $x^4 = x^3$.

I x^4 har vi bivillkor 2 och 3 aktiva. Då steglängden var ett, ska multiplikatorerna evalueras. Bivillkor 2 har negativ lagrangemultiplikator, varför detta villkor släpps. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 3 aktivt. Steglängden ett accepteras, vilket ger x^5. Bivillkor 3 har nu positiv lagrangemultiplikator, varför vi har hittat optimalpunkten.

(c) Man ser ur figur att $x^* = (3/2\ 3/2)^T$ får vi $Hx^* + c = (-3/2\ \ -3/2)^T$. Då $A_A = (-1 - 1)$ får vi $A_A x^* = -3 = b_A$. Dessutom blir $Hx^* + c = A_A^T \lambda^*$ för $\lambda^* = 3/2$. Då $\lambda^* > 0$ samt dessutom $Ax^* \geq b$ samt $H \succ 0$ gäller att x^* är globalt optimal till (QP).

4. Vi har

$$f(x) = -10x_1$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x) = 25 - x_1^2 - x_2^2, \quad \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g_1(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$g_2(x) = x_1, \quad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

QP-subproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}p^T\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(0)}, \lambda^{(0)})p + \nabla f(x^{(0)})^T p \\ \text{då} & \nabla g(x^{(0)})^T p \geq -g(x^{(0)}). \end{array}$$

(a) Insättning av numeriska värden ger

$$\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g(x^{(0)})^T = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösning, exempelvis grafiskt, ger $p^{(0)} = (8/3\ 0)^T$. Bivillkor 1 är aktivt med muliplikatorvektor $\lambda^{(1)} = (7/9\ 0)^T$. Därmed får vi $x^{(1)} = x^{(0)} + p^{(0)} = (17/3\ 0)^T$ och $\lambda^{(1)} = (7/9\ 0)^T$.

(b) Insättning av numeriska värden ger

$$\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g(x^{(0)})^T = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösning, exempelvis grafiskt, ger $p^{(0)} = (1/2\ 0)^T$. Inget bivillkor är aktivt. Därmed får vi $x^{(1)} = x^{(0)} + p^{(0)} = (7/2\ 0)^T$ och $\lambda^{(1)} = (0\ 0)^T$.

(c) Vi ser att $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x, \lambda) \succ 0$ om och endast om $\lambda_1 > 0$. Därmed blir $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(1)}, \lambda^{(1)}) \succ 0$ i (4a), men $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(1)}, \lambda^{(1)}) = 0$ i (4b). Man bör alltså modifiera i (4b), exempelvis genom att modifiera $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x, \lambda)$ till en positivt definit matris.

5. (a) Vi kan exempelvis studera Hessianen till målfunktionen, vilket ger

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x_2} & -\frac{2x_1}{x_2^2} \\ -\frac{2x_1}{x_2^2} & \frac{2x_1^2}{x_2^3} \end{pmatrix}$$

Om vi låter $A = 2/x_2$, $B = -2x_1/x_2^2$ och $C = 2x_1^2/x_2^3$ får vi $A > 0$ och $C - B^2/A = 0$ om $x_2 > 0$. Alltså ger ledningen att $\nabla^2 f(x) \succeq 0$ för $x_2 > 0$. Därmed blir f konvex på tillåtna området.

(b) Problemet (NLP) är ekvivalent med (NLP') enligt

$$(NLP') \qquad \begin{array}{ll} \min & x_3 \\ \text{då} & x_3 \geq \frac{x_1^2}{x_2} + x_2, \\ & x_1 \geq 5, \\ & x_2 \geq 1. \end{array}$$

För $x_2 > 0$ får vi

$$x_3 \geq \frac{x_1^2}{x_2} + x_2 \quad \Leftrightarrow x_3 - x_2 - \frac{x_1^2}{x_2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ x_1 & x_3 - x_2 \end{pmatrix} \succeq 0,$$

där ledningen använts i sista ledet med $A = x_2$, $B = x_1$ och $C = x_3 - x_2$. Därmed är (NLP') och (SDP) ekvivalenta.

(Vi kan se genom inspektion att optimallösningen är $x_1 = x_2 = 5$, $x_3 = 10$.)