KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Torsdagen den 8 mars 2001 kl. 14.00–19.00.

Examinator: Anders Forsgren, tel 790 71 27

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, inget svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Antag att vi vill lösa optimeringsproblemet

$$(P) \quad \min f(x)$$

där f är en kontiunerligt deriverbar funktion på $\mathbb{R}^n$. Om $\widehat{x}$ är en punkt i $\mathbb{R}^n$ sådan att $\nabla f(\widehat{x}) = 0$, är $\widehat{x}$ då garanterat en lokal minpunkt till (P)? .... (1p)

(b) Låt det konvexa optimeringsproblemet (P) definieras av

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \geq 0, \end{array}$$

där f och $-g_i$, $i = 1, \dots m$, är kontinuerligt deriverbara konvexa funktioner på $\mathbb{R}^n$. Antag att första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor (KKT-villkoren) är uppfyllda i en tillåten punkt $\widehat{x}$. Är då $\widehat{x}$ garanterat ett globalt minimum till (P)? .... (1p)

(c) Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ och $b \in \mathbb{R}^n$. Gäller då att konjugerade gradientmetoden löser problemet

$$\min \ \tfrac{1}{2} x^T A x + b^T x$$

i högst n iterationer om A är symmetrisk och positivt definit? .... (1p)

(d) Antag att man använder en SQP-metod för att lösa problemet

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \geq 0, \end{array}$$

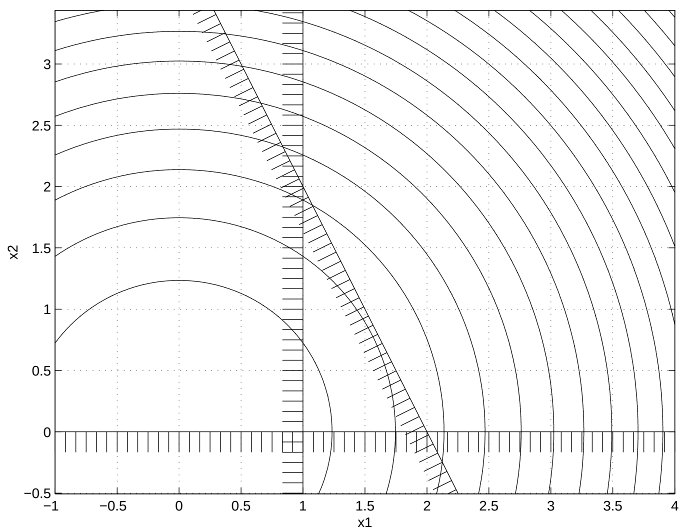
där f och g_i, $i = 1, \ldots, m$, är oändligt kontinuerligt deriverbara funktioner. Om startpunkten x_0 väljs så att $g(x_0) > 0$, gäller det då alltid att samtliga iterationspunkter x_k, $k \geq 1$, är tillåtna till (P)? .... (1p)

(e) Antag att man vill minimera en konvex funktion $f(x)$ utan några bivillkor, där $\nabla^2 f(x)$ är positivt definit för alla $x \in I\!R^n$. Låt p_k vara Newtonsteget beräknat i en viss punkt x_k. Gäller då garanterat att p_k är en descentriktning till f? (1p)

2. Betrakta QP-problemet (QP) definierat av

$$(QP) \qquad \begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{då} & 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ & x_1 \geq 1, \\ & x_2 \geq 0. \end{array}$$

Problemet kan illustreras geometriskt i nedanstående figur,



Lös (QP) med en active-set metod. Starta i punkten $x = (1.5 \; 3.5)^T$. Du behöver inte räkna ut några exakta numeriska värden, utan kan utnyttja att problemet är tvådimensionellt, och göra en rent geometrisk lösning. Illustrera dina iterationer i figuren som finns längst bak. Motivera varje steg ordentligt. .... (5p)

3. Betrakta det ickelinjära matematiska programmeringsproblemet

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}(x_1+1)^2 + \frac{1}{2}(x_2+2)^2 \\ \text{då} & 3(x_1+x_2-2)^2 + (x_1-x_2)^2 - 6 = 0. \end{array}$$

Du har fått en utskrift från en SQP-lösare för detta problem. Som startpunkt har valts $x = (0 \; 0)^T$ och $\lambda = 0$. Sex iterationer, utan linjesökning, har utförts. Utskriften innehåller följande data:

It	x_1	x_2	λ	$\|\nabla f(x) - \nabla g(x)\lambda\|$	$\|g(x)\|$
0	0	0	0	2.2361	6
1	0.75	-0.25	-0.14583	0.74361	1.75
2	0.5285	0.050045	-0.20644	0.098113	0.29052
3	0.57728	0.041731	-0.21804	0.0044016	0.0081734
4	0.57666	0.043089	-0.21854	$4.1731 \cdot 10^{-6}$	$5.5421 \cdot 10^{-6}$
5	0.57666	0.043089	-0.21854	$3.9569 \cdot 10^{-12}$	$4.8512 \cdot 10^{-12}$
6	0.57666	0.043089	-0.21854	$1.1102 \cdot 10^{-15}$	$1.7764 \cdot 10^{-15}$

(a) Ställ upp det första QP-problemet. Verifiera att lösningen till detta QP-problem som ges av utskriften ovan är korrekt. ....(3p)

(b) Karakterisera, så bra som möjligt, vilken typ av punkt SQP-lösaren ovan konvergerar mot. ....(2p)

Anmärkning: I enlighet med bokens konvention definierar vi lagrangefunktionen $\mathcal{L}(x,\lambda)$ enligt $\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$, där $f(x)$ är målfunktionen och $g(x)$ är bivillkorsfunktionen.

4. Betrakta det ickelinjära matematiska programmeringsproblemet

$$(P)\qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \geq 0, \end{array}$$

där $f : I\!R^n \to I\!R$ och $g : I\!R^n \to I\!R^m$ är kontinuerligt differentierbara.

En barriärtransformation av (P) ger för en fix positiv barriärparameter μ problemet

$$(P_\mu)\qquad \min \quad f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m} \ln(g_i(x)).$$

Visa att första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor för (P_μ) är ekvivalenta med ekvationssystemet

$$\begin{aligned} \nabla f(x) - \nabla g(x)\lambda &= 0, \\ g_i(x)\lambda_i - \mu &= 0, \quad i = 1,\ldots,m, \end{aligned}$$

förutsatt att $g(x) > 0$ och $\lambda > 0$ hålls implicit. ....(5p)

5. Betrakta optimeringsproblemet (P) definierat av

$$(P)\qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x + \frac{1}{2} x^T H x \\ \text{då} & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,\ldots,n, \end{array}$$

där H är en indefinit symmetrisk matris. Problem av den typen uppstår inom kombinatorisk optimering, och här vill man ha globalt optimum.

För att ge undre gränser för optimalvärdet till (P) vill man gärna kunna beräkna undre gränser via relaxerade problem.

(a) Ett sätt att relaxera (P) är att ersätta villkoren $x_j \in \{0,1\}$, $j = 1,\ldots,n$, med $0 \le x_j \le 1$, $j = 1,\ldots,n$. Detta ger ett relaxerat problem utan diskreta variabler, enligt

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + \frac{1}{2} x^T H x \\ \text{då} & 0 \le x_j \le 1, \quad j = 1,\ldots,n, \end{array}$$

Förklara varför detta relaxerade problem inte är så intressant i praktiken för att beräkna undre gränser till optimalvärdet till (P). ....(2p)

(b) Ett alternativt sätt att skapa en relaxering till (P) är att införa en symmetrisk matris Y och ställa upp det semidefinita programmeringsproblemet

$$(SDP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x + \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}(HY) \\ \text{då} & \begin{pmatrix} Y & x \\ x^T & 1 \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ & Y = Y^T, \\ & y_{jj} = x_j, \quad j = 1,\ldots,n. \end{array}$$

Visa att om bivillkoret $Y = xx^T$ läggs till (SDP), får man ett problem som är ekvivalent med (P). (Därmed har du visat att (SDP) är en relaxering till (P), eller hur?) ....(3p)

Ledning: Följande två resultat, som får användas utan bevis, kan vara till nytta:

(i) Om H är en $n \times n$-matris och x en n-vektor, så gäller $\mathrm{trace}(Hxx^T) = x^T H x$.

(ii) Om Y är en symmetrisk $n \times n$-matris och x en n-vektor, så gäller att

$$\begin{pmatrix} Y & x \\ x^T & 1 \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

om och endast om

$$Y - xx^T \succeq 0.$$

Lycka till!

Namn: . . . . Personnummer: . . . . Blad nummer: . . . .