Kungl Tekniska Högskolan

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Måndagen den 23 april 2001 kl. 8.00–13.00.

Examinator: Anders Forsgren, tel 790 71 27

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, inget svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Antag att vi vill lösa optimeringsproblemet

$$(P) \quad \min \; f(x)$$

där f är en två gånger kontiunerligt deriverbar funktion på $I\!R^n$. Om $\widehat{x}$ är en punkt i $I\!R^n$ sådan att $\nabla f(\widehat{x}) = 0$ och $\nabla^2 f(\widehat{x})$ är positivt definit, är $\widehat{x}$ då garanterat en lokal minpunkt till (P)? .... (1p)

(b) Betrakta optimeringsproblemet

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \geq 0. \end{array}$$

där $f : I\!R^n \to I\!R$ och $g : I\!R^n \to I\!R^m$ är två gånger kontinuerligt deriverbara. Antag nu att x^* är en reguljär punkt och dessutom en global minpunkt till (P). Gäller då garanterat att x^* uppfyller andra ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor? .... (1p)

(c) Antag att man använder en ”active set”-metod för att lösa problemet

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där Q är en positivt definit kvadratisk $n \times n$-matris. Om initialpunkten x_0 väljs så att $Ax_0 \geq b$, gäller det då att metoden konvergerar i högst n steg? ....(1p)

(d) I en kvasi-Newton metod uppdateras som bekant hessianapproximationen, B_k, enligt $B_{k+1} = B_k + \Delta B_k$. Antag att $\Delta B_k = u_k u_k^T$ för lämplig vektor u_k. Kan man då garantera att kvasi-Newton-villkoret uppfylls samt att $B_k = B_k^T \succ 0$ gäller för alla k om $B_0 = I$. .... (1p)

(e) Betrakta det semidefinita programmeringsproblemet

$$(SDP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & \sum_{j=1}^n A_j x_j \succeq B, \end{array}$$

där A_j, $j = 1, \dots, n$, och B är symmetriska $m \times m$-matriser. Antag att $\widehat{x}$ är en lokal minpunkt till (SDP). Är $\widehat{x}$ då garanterat också en global minpunkt till (SDP)? .... (1p)

2. Betrakta NLP-problemet

$$(NLP) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_i(x) \ ? \ 0, \quad i = 1, \dots, 3, \\ & x \in I\!R^3, \end{array}$$

där $f : I\!R^3 \to I\!R$ och $g : I\!R^3 \to I\!R^3$ är två gånger kontinuerligt deriverbara och varje "?" är en olikhet, antingen "$\leq$" eller "$\geq$". Olikheterna får vara av olika typ för de olika bivillkoren.

Antag att vi har en punkt x^* så att

$$f(x^*) = 0, \quad \nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}^T, \quad \nabla^2 f(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x^*) = 0, \quad \nabla g_1(x^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T, \quad \nabla^2 g_1(x^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_2(x^*) = 3, \quad \nabla g_2(x^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T, \quad \nabla^2 g_2(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

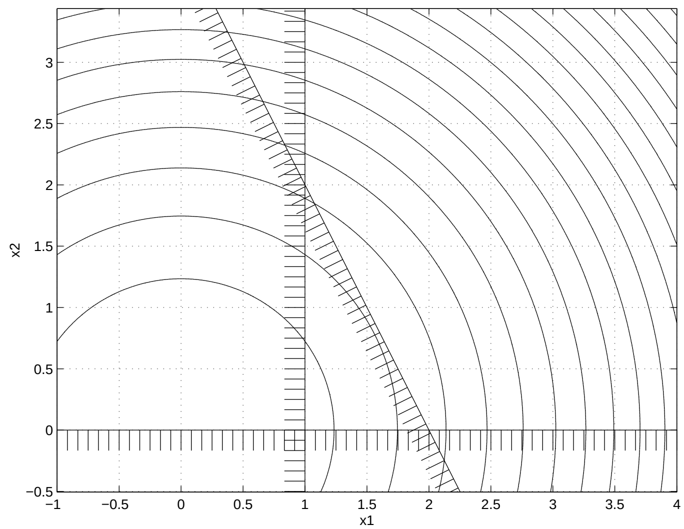
$$g_3(x^*) = 0, \quad \nabla g_3(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \nabla^2 g_3(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kan man sätta in olikheter av typ "$\leq$" eller "$\geq$" i stället för "?" så att x^* blir en lokal minpunkt till (NLP)? (Olikheterna får alltså vara av olika typ för de olika bivillkoren). .... (5p)

3. Betrakta QP-problemet (QP) definierat av

$$
(QP) \quad \begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{då} & 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ & x_1 \geq 1, \\ & x_2 \geq 0. \end{array}
$$

Problemet, som även förekom på den ordinarie tentamen, kan illustreras geometriskt i nedanstående figur.



Antag att vi vill lösa (QP) med en primal-dual inrepunktsmetod. Antag vidare att vi initialt väljer $x = (2\ 2)^T$, $\lambda = (2\ 2\ 2)^T$, samt $\mu = 1$.

(a) Ställ upp det det linjära ekvationssystem som behöver lösas i första iterationen av den primal-duala inrepunktsmetoden för de givna initialvärdena. Ställ upp den allmänna formen och sätt sedan in explicita numeriska värden i ekvationssystemet. .... (3p)
Anmärkning: Lösningen till det linjära ekvationssystemet ges av $\Delta x = (-1/14\ \ -5/7)^T$ och $\Delta\lambda = (-9/14\ \ -6/7\ \ -11/14)^T$.

(b) Låt lösningen till det primal-duala ekvationssystemet för ett givet μ betecknas med $x(\mu)$ och $\lambda(\mu)$. Ge en uppskattning till $x(1)$ baserat på svaret ovan. Bestäm också $\lim_{\mu\to 0} x(\mu)$ på valfritt sätt, exempelvis ur figuren. Du kan, om du vill, markera $\lim_{\mu\to 0} x(\mu)$ i figuren som finns längst bak, och behöver inte räkna ut några numeriska värden för gränsvärdet. .... (2p)
Anmärkning: Du ska *inte* räkna ut $x(\mu)$.

4. Betrakta problemet (P) definierat av

$$
(P) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) = 0, \\ & x \in I\!R^n, \end{array}
$$

där $x \in I\!R^n$ och $g(x) \in I\!R^m$. Optimalitetsvillkor för (P) är (som bekant) följande:

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x) - \nabla g(x)\lambda &= 0, \\
g(x) &= 0.
\end{aligned}
$$

Antag att Newtons metod används för att lösa detta ickelinjära ekvationssystem i $x \in I\!R^n$ och $\lambda \in I\!R^m$. Härled det linjära ekvationssystem som behöver lösas, givet den aktuella iterationspunkten (x_k, λ_k), vid en Newtoniteration. Detta linjära ekvationssystem är under lämpliga förutsättningar ekvivalent med ett visst QP-problem. Ange förutsättningarna och ställ upp QP-problemet. ....(5p)

5. Antag att vi har ett linjärprogrammeringsproblem (LP) givet av

$$
(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \ge 0, \end{array}
$$

Ett tänkbart sätt att eliminera olikhetsbivillkoren är att införa "kvadratiska slackvariabler" w_j, $j = 1, \ldots, n$, så att vi löser problemet (NLP) givet av

$$
(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x_j - w_j^2 = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \end{array}
$$

där x och w alltså är variablerna.

(a) Ställ upp första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor till (NLP). På vilket sätt skiljer sig dessa från första ordningens optimalitetsvillkor till (LP)? Ge skillnaden i termer av optimalitetsvillkoren för (LP), på så enkel form som möjligt. ....(3p)

(b) Antag att du löser (NLP) med en metod som ger dig lösningar som uppfyller första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor. Har du då en metod som också löser (LP)? ....(2p)

Lycka till!

Namn: . . . . Personnummer: . . . . Blad nummer: . . . .